

Lokalisierung relativistischer Elementarsysteme

Domenico P. L. Castrigiano

1976

LOKALISIERUNG RELATIVISTISCHER ELEMENTARSYSTEME

**Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades des
Fachbereichs Physik der
Ludwig-Maximilian-Universität zu München**

**vorgelegt von
Domenico P.L. Castrigiano
München, März 1976**

1. Berichterstatter: Prof.Dr. H.J.Meister
 2. Berichterstatter: Prof.Dr. G.Süßmann
- Auswärtiger Gutachter: Dr. S.Schlieder

Tag der mündlichen Prüfung: 22.12.76



Zusammenfassung.

Es wird ein Lokalisierungskonzept entwickelt, womit sich in einheitlicher Weise massive wie masselose (relativistische) physikalische Systeme lokalisieren lassen; insbesondere sind danach auch masselose Elementarsysteme lokalisierbar. Das Lokalisierungskonzept von WIGHTMAN [4] für massive Systeme ist darin als ein Spezialfall enthalten, das nach JAUCH und PIRON [6] für das zweikomponentige Photon ergibt sich daraus bei alleiniger Betrachtung der strikt lokalisierten Zustände. Diese erfüllen genau die Kovarianz- und Orthogonalitätseigenschaften nach NEWTON und WIGNER [3]. Der wesentliche neue Zug unseres Lokalisierungskonzepts ist die Einführung eines Lokalisierungsgrades: Demzufolge sind die Lokalisierungsoperatoren i.allg. nicht mehr Projektoren, sondern selbstadjungierte Operatoren mit einem Spektrum zwischen 0 und 1. Ein wichtiges Ergebnis ist, daß für masselose Elementarsysteme der Lokalisierungsgrad zu jedem Raumgebiet mit nichtleerem Inneren - also insbesondere auch zu beschränkten Raumgebieten dieser Art - bei entsprechender Präparation des physikalischen Systems beliebig nahe bei 1 liegt. Für die experimentelle Praxis bedeutet dies die Lokalisierbarkeit solcher Systeme.

Unser Lokalisierungskonzept erlaubt eine kanonische Konstruktion von Ortsoperatoren. Ihre Erwartungswerte geben Aufschluß über den Lokalisierungsgrad. Z.T. sind diese Operatoren aus der Literatur über einen anderen Zugang bereits bekannt.

Schließlich beweisen wir einen Darstellungssatz für kovariante POV-Maße, der entscheidend ist für die explizite Konstruktion der Lokalisierungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Mathematische Beschreibung der Lokalisierbarkeit 7

3 Lokalisierung und relativistische Invarianz 18

3.1 Relativistische Symmetrie 18

3.2 Lokalisierung auf raumartigen Hyperebenen und manifest
poincarékovariante Formulierung 20

4 Konstruktion der Lokalisierungen 22

4.1 Allgemeine Konstruktionsmethode für Lokalisierungen ... 22

4.2 Dilatationskovariante Lokalisierungen elementarer Sy-
steme 23

4.2.1 Die dilatationskovarianten Lokalisierungen masseloser
Elementarsysteme 23

4.2.2 Dilatationskovariante Lokalisierungen des zweikomponen-
tigen Photons 34

4.2.3 Dilatationskovariante Lokalisierungen massiver Elemen-
tarsysteme 35

5 Lokalisierung und Ortsoperator 37

5.1 Allgemeiner Zusammenhang von Lokalisierung und Ortsope-
rator 37

5.2 Die Ortsoperatoren zu den reinen Lokalisierungen aus
Kap.4.2 41

5.2.1 Dilatationskovariante Ortsoperatoren masseloser Elemen-
tarsysteme 42

5.2.2 Der dilatationskovariante Ortsoperator des zweikompo-
nentigen Photons 44

5.2.3 Dilatationskovariante Ortsoperatoren massiver Elemen-
tarsysteme 44

5.3 Ortsoperatoren und Erzeugende der Liealgebra der Poin-
carégruppe 45

5.3.1 Ortsoperatoren im Masse-Null-Fall $U_p^{(0,m)}$ 46

5.3.2 Ortsoperatoren im Fall positiver Masse $U_p^{(\mu,j)}$ 47

6	Kovariante POV-Maße	49
7	Einiges über unitäre Darstellungen der Drehgruppe, der euklidischen Gruppe, der euklidischen Gruppe mit Dilatati- onen und der Poincarégruppe	66
7.1	Einiges über die $SU(2)$	66
7.2	Die irreduziblen unitären Darstellungen der $SU(2)$	68
7.2.1	Eine Serie von Homomorphismen auf $M(2, \mathbb{C})$	68
7.2.2	Die irreduziblen unitären Darstellungen der $SU(2)$	69
7.3	Die irreduziblen unitären Darstellungen der $ISU(2)$	70
7.4	Die Ausreduktion der Einschränkungen der irreduziblen Dar- stellungen der $ISU(2)$ auf die $SU(2)$	71
7.5	Die Ausreduktion der von den irreduziblen unitären Dar- stellungen der $SU(2)$ induzierten Darstellungen der $ISU(2)$	73
7.6	Die Ausreduktion der Einschränkungen der induzierten Dar- stellungen der $ISU(2)$ auf die $SU(2)$	74
7.7	Die irreduziblen unitären Darstellungen der Dilatations- gruppe D	75
7.8	Die irreduziblen unitären Darstellungen der $DSU(2)$	76
7.9	Die irreduziblen unitären Darstellungen der $IDSU(2)$	76
7.10	Die Ausreduktion der von den irreduziblen unitären Dar- stellungen der $DSU(2)$ induzierten Darstellungen der $IDSU(2)$	77
7.11	Einiges über die $SL(2, \mathbb{C})$	77
7.12	Die irreduziblen unitären Darstellungen von P zu reeller Masse und diskretem Spin und die Ausreduktion ihrer Ein- schränkungen auf die $ISU(2)$	79
7.12.1	Die Ausreduktion von $\tilde{P}_{ISU(2)}^{(\mu, j)}$	80
7.12.2	Die Ausreduktion von $\tilde{P}_{ISU(2)}^{(o, m)}$	81
8	Schlußbemerkung	82
	Liste der verwendeten mathematischen Symbole	84
	Literaturverzeichnis	87

1 Einleitung

Es besteht ein bemerkenswerter Gegensatz zwischen der Selbstverständlichkeit, mit der uns der Begriff der Lokalisierbarkeit von der klassischen Physik her vertraut ist - dort ist er wohl selten einer eingehenden Analyse unterzogen worden -, und den konzeptionellen Schwierigkeiten, die er in der Quantentheorie von Anfang an gemacht hat. Die Entdeckung der Unschärferelation bewies nachgerade seine Nichttrivialität und maß ihm eine zentrale Bedeutung in der Physik zu. Dennoch ist das Lokalisierungsproblem lediglich in den Grenzen der nichtrelativistischen Theorie vollständig gelöst. Dort stellt sich die Beschreibung des Ortes eines Teilchens durch die zum Impulsoperator kanonisch konjugierte Größe, den Ortsoperator, als zwingend dar. In der relativistischen Theorie sind die Dinge weit weniger evident und physikalische Intuition allein führt leicht zu Unvereinbarkeiten. So gibt es für das Paradebeispiel eines relativistischen Objekts, des Photons, trotz intensiver Bemühungen kein allgemein anerkanntes Konzept der Lokalisierung, wie etwa der Übersichtsartikel [1] deutlich zeigt.

Ein Zugang zu dem Problem, der in der Literatur den weitaus größten Raum einnimmt, ist die Annahme eines Ortsoperators, ganz in Analogie zu dem Vorgehen im nichtrelativistischen Fall. An ihn werden von Autor zu Autor wechselnde, oft klassischen Eigenschaften nachgebildete Forderungen gestellt (vgl. [1; Kap. 3]). Da die Gesamtheit dieser Forderungen nachgewiesenermaßen unerfüllbar ist, stellt sich die Frage nach deren Unabdingbarkeit. Zur Illustration wollen wir drei Eigenschaften des Ortsoperators ansprechen, die häufig gefordert werden:

- a Kovarianzverhalten eines Dreiervektors im Ortsraum,
- b Vertauschbarkeit seiner Komponenten,
- c manifeste Poincarékovarianz (hierfür findet man in der Literatur mehrere Möglichkeiten der Formulierung).

Fast alle vorgeschlagenen Ortsoperatoren besitzen die Eigenschaft a. Sie führt zu den aus der nichtrelativistischen Theorie bekannten kanonischen Vertauschungsrelationen mit Impuls und Drehimpuls. In ihrer integrierten Form, in der die euklidischen Transformationen direkt involviert sind, ist sie unmittelbarer Ausdruck der

Homogenität und Isotropie des Raumes. b hat zur Folge, daß alle Ortsmessungen miteinander verträglich sind. Nun wird gerade in der Quantenfeldtheorie betont, daß die zu den Ortsmessungen gehörenden Observablen keine Elemente der lokalen Algebra sind, eine Vertauschbarkeit der entsprechenden Operatoren daher i.allg. nicht gewährleistet ist. c ist keine Folgerung aus dem relativistischen Prinzip der physikalischen Äquivalenz verschiedener Inertialsysteme, die auch ohne manifeste Poincarékovarianz bestehen kann. Sie ist eine echte Zusatzforderung, die an anderer Stelle als Rechenerleichterung begrüßt wird, hier aber zu Schwierigkeiten führt. So sind, um eine manifest poincarékovariante Formulierung zu erreichen, sogar nicht normale und daher nicht selbstadjungierte Ortsoperatoren in Betracht gezogen worden (vgl. z.B. [21]). Wie man weiß, ist für massive Teilchen der Ortsoperator von NEWTON und WIGNER der einzige selbstadjungierte Operator, der a und b erfüllt; er erfüllt jedoch nicht c . Im Fall masseloser Teilchen sind nicht einmal a und b miteinander vereinbar.

Ein zweiter Zugang ist wohl das erste Mal in der klassischen Arbeit von NEWTON und WIGNER [3] aufgezeigt worden. Er stellt die Menge der lokalisierten Zustände in den Vordergrund. Für diese werden Kovarianz- und Orthogonalitätseigenschaften untersucht. Eine begriffliche und mathematische Erhellung erfährt dieses Konzept bei WIGHTMAN [4]. Der grundlegende Begriff dort ist der eines Imprimitivitätssystems, das mathematischer Ausdruck für die Gesamtheit der Alternativfragen ist, die durch die Ortsmessung gestellt werden. Die sich daraus kanonisch ergebenden Ortsoperatoren sind die von NEWTON und WIGNER. In [4] wird auch gezeigt, daß es solche kovarianten Projektormaße, wie es die Imprimitivitätssysteme sind, für masselose Teilchen mit von Null verschiedener Helizität nicht gibt. Sie gibt es auch nicht - wie man z.B. aus [6] weiß - für das zweikomponentige Photon.

Wie aus der Arbeit von WIGHTMAN klar wird, ist die Annahme eines Ortsoperators nicht wesentlich. Primär folgt aus der Lokalisierbarkeit eines physikalischen Systems vielmehr die Existenz einer kovarianten Zuordnung von Raumgebieten und Observablen. Auf dieser Basis entwickeln JAUCH und PIRON [6] ein Lokalisierungskonzept, das von verallgemeinerten Imprimitivitätssystemen ausgeht. In Abschwächung

der Maßeigenschaft werden kovariante projektorwertige Mengenfunktionen betrachtet, die lediglich supraadditiv sind. Klarerweise ist dann eine kanonische Konstruktion von Ortsoperatoren nicht mehr möglich. In diesem Rahmen zeigt AMREIN [7], daß es in beschränkten Raumgebieten lokalisierte masselose Teilchen mit gemischtem Vorzeichen der Helizität gibt. Ein masseloses Teilchen mit scharfer Helizität läßt sich jedoch nach einem von uns verschärften Beweis auf keinen Fall in einem beschränkten Raumgebiet im Sinne von [6] lokalisieren; denn der einem solchen Raumgebiet zuzuordnende Projektor ist der Nulloperator (damit kann offensichtlich auch nicht von einer wie auch immer zu verstehenden Quasilokalisierbarkeit für beschränkte Raumgebiete gesprochen werden). Dies ist u.E. ein schwerwiegender Einwand gegen den in [6] gemachten Ansatz. Denn bekanntlich unterscheiden sich Neutrino und Antineutrino gerade im Vorzeichen ihrer Helizität, und wegen der Überauswahlregel der Erhaltung der Leptonenzahl kann es keine Superposition eines Neutrino- und Antineutrinozustandes geben. Die Folgerung aus [6] wäre daher die Nichtlokalisierbarkeit des Neutrinos, was für alle vier Neutrinoarten dem experimentellen Sachverhalt widerspricht. Im Falle des Photons wird zwar bei Wechselwirkung eine Änderung der Helizität beobachtet - der Zustandsraum des Photons umfaßt also beide Helizitäten -, aber eine solche Änderung tritt nicht spontan ohne Einwirkung von außen auf. Ein Photon mit scharfer Helizität ist daher ein elementares System.⁺⁾ Da wir hier nur eine freie Theorie betrachten, ist Lokalisierbarkeit nicht mit einer Ortsmessung gleichzusetzen, die eine Wechselwirkung bedingt. Sie ist vielmehr eine Eigenschaft des Propositionensystems und führt nicht aus dem betrachteten physikalischen System heraus. (Natürlich werden wir auch das zweikomponentige Photon in Hinblick auf seine Lokalisierbarkeit untersuchen.)

Worin liegt der Unterschied zwischen einem massiven und einem masselosen Elementarsystem, daß für das erstere das Lokalisierungskonzept nach WIGHTMAN anwendbar ist, für das letztere jedoch nicht

^{+) Wir verwenden den Begriff 'elementares (physikalisches) System' im Sinne von WIGNER (vgl. [3]). Gruppentheoretisch wird ein solches System durch eine irreduzible Darstellung der kinematischen Symmetriegruppe repräsentiert.}

einmal das verallgemeinerte nach JAUCH und PIRON? Mathematisch gesprochen ist es die Tatsache, daß die Darstellung der Poincarégruppe, durch die ein massives Elementarsystem repräsentiert wird, eine euklidisch kovariante Zuordnung von Raumgebieten und Projektoren zuläßt, die für disjunkte Raumgebiete zueinander orthogonal sind. Darstellungen, die masselose Elementarsysteme repräsentieren, erlauben jedoch - wie wir mit dem Hilfssatz (2.5) haben zeigen können - eine solche Zuordnung nur in trivialer Weise, wo jedem beschränkten Raumgebiet der Nulloperator zugeordnet wird. Was bedeutet dies physikalisch? Das Entscheidende ist, daß die Lokalisierungsoperatoren - wie wir die den Raumgebieten zugeordneten Operatoren nennen wollen - Projektoren sind, also Observable mit lediglich zwei möglichen Meßresultaten repräsentieren. Zudem ergeben simultane Messungen in bezug auf disjunkte Raumgebiete aufgrund der Orthogonalität der Lokalisierungsoperatoren höchstens einmal ein positives Resultat. Die naheliegende Interpretation ist daher, daß die Gesamtheit der Lokalisierungsoperatoren die Lage eines Punktes beschreiben. Dieser Punkt ist durch das physikalische System definiert, etwa wie der Schwerpunkt eines klassischen starren Körpers, und - was wesentlich ist - die Definition ist euklidisch kovariant: Unterwirft man das System einer aktiven euklidischen Transformation, so ergeben sich die neuen Koordinaten dieses Punktes aus den alten durch eben diese Transformation. Die Aussage ist also, daß ein massives Elementarsystem die euklidisch kovariante Auszeichnung eines in bezug auf seine Lokalisierbarkeit charakteristischen Punktes zuläßt. Für ein masseloses Elementarsystem ist dies nicht möglich. Es besitzt keinen "Schwerpunkt" seiner Verteilung.

In dieser Arbeit führen wir ein Lokalisierungskonzept ein, das [4] als Spezialfall enthält und der aufgezeigten Eigenart masseloser Elementarsysteme gerecht wird. Dabei lassen wir uns von der Modellvorstellung einer im Raum verteilten Substanz des physikalischen Systems leiten, wodurch gegenüber [4] ein weiterer "Freiheitsgrad", der Lokalisierungsgrad, gewonnen wird. Folgerichtig sind die Lokalisierungsoperatoren daher i.allg. nicht mehr Projektoren, sondern selbstadjungierte Operatoren mit einem Spektrum zwischen 0 und 1. Dies ist der wesentliche neue Zug unseres Lokalisierungskonzepts im Vergleich zu früheren. Für masselose Elementarsysteme zeigt sich,

daß die Erwartungswerte der Lokalisierungsoperatoren zu beschränkten Raumgebieten kleiner 1 sind - es also keine strikt lokalisierten Zustände gibt -, den Wert 1 jedoch beliebig gut approximieren. Damit tritt an die Stelle des Begriffes des strikt lokalisierten Zustandes der Begriff der Konzentrierbarkeit, wonach bei entsprechender Präparation des physikalischen Systems ein beliebig hoher Bruchteil seiner Substanz in einem willkürlich herausgegriffenen Raumgebiet anzutreffen ist. Aus der Sicht der experimentellen Praxis macht diese mathematische Abschwächung offensichtlich keinen Unterschied. Unser Lokalisierungskonzept erlaubt eine kanonische Konstruktion von Ortsoperatoren. Ihre Erwartungswerte spiegeln die Substanzverteilung des Systems wider. (Wie sich herausstellt, sind diese Operatoren z.T. in der Literatur bereits bekannt.) Doch ist zu beachten, daß sich nur in genau bestimmten Spezialfällen die Lokalisierungsoperatoren aus dem Ortsoperator rekonstruieren lassen, und daher der Ortsoperator i.allg. zu wenig Information über die Ortsmessung enthält. So vertauscht z.B. im Fall des zweikomponentigen Photons der Ortsoperator mit dem Helizitätsoperator, während eine Ortsmessung die Polarisation des Photons i.allg. stört. Weiter zeigen wir, daß die strikt lokalisierten Zustände eines physikalischen Systems genau die Kovarianz- und Orthogonalitätsforderungen von NEWTON und WIGNER erfüllen. Bei alleiniger Betrachtung der strikt lokalisierten Zustände reduziert sich unser Lokalisierungskonzept auf das von [6].

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Kap.2 enthält die mathematische Beschreibung des Begriffes der Lokalisierbarkeit und die heuristischen Betrachtungen, die zu ihr führen. Die Begriffe Lokalisierung, Konzentrierbarkeit und strikt lokalisierter Zustand sowie reine Lokalisierung werden definiert. Es wird ein Hilfssatz zur Lokalisierbarkeit (2.5) bewiesen, der ein wesentliches Argument für unser Lokalisierungskonzept liefert. Schließlich ziehen wir erste wichtige Folgerungen aus den Postulaten der Lokalisierbarkeit. Insbesondere zeigen wir, daß die physikalisch relevante Eigenschaft der Konzentrierbarkeit stets dann vorliegt, wenn die Lokalisierung dilatationskovariant ist. Ehe wir uns in Kap.4 der expliziten Konstruktion der Lokalisierungen zuwenden, vergewissern wir uns in Kap.3, daß das in dieser Arbeit eingeführte Lokalisierungskonzept dem Relati-

vitätsprinzip genügt. Neben dem Nachweis dieser unerläßlichen Eigenschaft geben wir im gleichen Kapitel noch eine manifest poincarékovariante Formulierung des Lokalisierungskonzepts an, was zu einer kanonischen Erweiterung der Lokalisierungen auf raumartige Hyperflächen führt. Kap.4 beginnt damit, den allgemeinen mathematischen Sachverhalt bei der Konstruktion eines kovarianten POV-Maßes (vgl. Kap.6) für den hier benötigten Spezialfall eines euklidischen Kovarianzsystems zu erläutern. Wir sind damit in der Lage, in 4.2 die dilatationskovarianten Lokalisierungen für masselose Elementarsysteme, für das zweikomponentige Photon und für massive Elementarsysteme explizit anzugeben. (Die dilatationskovarianten Lokalisierungen masseloser Elementarsysteme geben wir bis auf Äquivalenz vollständig an. Ihre Gesamtheit ist die lineare konvexe Hülle der Menge der *reinen* dilatationskovarianten Lokalisierungen.) Im Satz (4.4) haben wir uns die Mühe gemacht, die Struktur der Lokalisierungsoperatoren zur Einheitskugel näher zu untersuchen. Die Beziehung von Lokalisierung und Ortsoperator behandeln wir in Kap.5. Zunächst wird der allgemeine Zusammenhang erläutert, dann werden die Ortsoperatoren zu den in Kap.4.2 angegebenen Lokalisierungen explizit berechnet. Schließlich drücken wir diese Ortsoperatoren durch die Erzeugendenelemente der Liealgebra der Poincarégruppe aus. Die beiden folgenden Kapitel 6 und 7 sind rein mathematischer Natur und bilden den harten Kern der Arbeit. Wir haben damit die benötigte Mathematik weitgehend abgetrennt, um den vorangehenden, mehr physikalischen Teil leichter lesbar zu machen. Zum anderen war es dadurch möglich, die Mathematik abstrakt und daher durchsichtiger zu behandeln, was insbesondere dem Kap.6 zugute gekommen ist. Kap.6 dürfte für sich interessieren, da dort ein Darstellungssatz für kovariante POV-Maße bewiesen wird. In Kap.7 findet man technische Details über unitäre Darstellungen einiger physikalischer Gruppen, die in Kap.4 und 5 wesentlich benötigt werden.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof.Dr.H.J.Meister für die Anregung zu dieser Arbeit und seine stete Bereitschaft zu gründlichen und wertvollen Diskussionen danken. Den Herrn Dr.H.Brennich und Dr.U.Mutze danke ich für ihr reges Interesse und ihren vielen sachkundigen Kommentaren. Insbesondere verdanke ich Herrn Dr.U.Mutze die für Kap.3.2 wesentliche Idee. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für finanzielle Unterstützung.

2 Mathematische Beschreibung der Lokalisierbarkeit

In diesem Kapitel definieren wir den Begriff der Lokalisierbarkeit mit Hilfe einiger mathematischer Postulate. Zu ihrer Begründung gehen wir von einer Modellvorstellung aus, die einerseits die charakteristischen Züge der Lokalisierbarkeit enthält, andererseits eine einfache mathematische Beschreibung zuläßt. Es ist das Ziel, mit Hilfe des Lokalisierungsprinzips a-priori-Aussagen über ein quantenmechanisches System zu machen, die keine Annahmen über die Art der Wechselwirkung erfordern, die ja in der experimentellen Praxis stets mit einer Lokalisierung einhergeht. Bei einem Vergleich mit dem Lokalisierungskonzept von WIGHTMAN [4] (s. auch MACKEY [5;§10]) erweist sich das hier betrachtete Lokalisierungskonzept als eine direkte Verallgemeinerung, d.h. [4] ergibt sich als Spezialfall. Wir werden sehen, in welchem Sinn auch das Lokalisierungskonzept von JAUCH und PIRON [6] hier enthalten ist. Die in diesem Zusammenhang zu definierenden strikt lokalisierten Zustände eines physikalischen Systems erfüllen die Kovarianz- und Orthogonalitätsforderungen von NEWTON und WIGNER [3]. Eine brauchbare Beschreibung der Lokalisierbarkeit masseloser Elementarsysteme erfordert es, wie die Mathematik zeigt, den Begriff des strikt lokalisierten Zustandes abzuschwächen zu dem allgemeineren Begriff der Konzentrierbarkeit. Mit zwei No-Go-Aussagen, ein Hilfssatz zur Lokalisierbarkeit (2.5) und eine Arbeit von HEGERFELDT [12] über Lokalisierbarkeit und Kausalität, machen wir auf einige unbefriedigende Züge der Lokalisierungskonzepte von [4] und [6] aufmerksam, die eine Verallgemeinerung in unsere Richtung hin notwendig erscheinen lassen. Außerdem geben wir noch einige Folgerungen an, die sich direkt aus den Postulaten der Lokalisierbarkeit ziehen lassen.

Im Teilchenbild der Quantenmechanik für elementare Systeme, insbesondere bei Punktteilchen ohne räumliche Ausdehnung, scheint der Begriff der Lokalisierbarkeit klar zu sein: Das Teilchen ist in einem Raumgebiet M lokalisiert, wenn es sich dort befindet. Aufgrund des Alternativcharakters der Lage eines Punktes in bezug auf eine Menge wird die zugehörige Observable - falls sie existiert - durch einen selbstadjungierten Operator, der nur die Eigenwerte 0 oder 1 besitzt, d.h. durch einen Projektionsoperator, repräsentiert. Ihre Erwartungs-

werte sind die Wahrscheinlichkeiten, das Teilchen bei einer Ortsmessung in dem betrachteten Gebiet anzutreffen. Diese Betrachtungsweise stellt die Weichen in Richtung eines Lokalisierungskonzepts nach [4] bzw. [6]. Wir wollen jedoch den folgenden Punkt stärker berücksichtigen. Jede Messung, auch eine Ortsmessung, erfordert eine Wechselwirkung mehrerer Systeme. Die Anwesenheit eines Teilchens ist nur aufgrund seiner Fähigkeit zur Wechselwirkung mit anderen Systemen feststellbar. Dazu können verschiedene Eigenschaften des Teilchens herangezogen werden (elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung, Wechselwirkung über Gravitation). Umgekehrt sind wir von der klassischen Physik her gewohnt, daß ein Wechselwirkungsgesetz stets Eigenschaften des Raumes involviert, insbesondere die seiner Metrik. Der denkbar einfachste Fall ist eine Abstandsgesetzmäßigkeit etwa der Art, daß die durch Wechselwirkung zweier Systeme hervorgerufenen Zustandsänderungen umso geringer sind, je weiter die beiden Systeme voneinander entfernt sind. Da die Lokalisierbarkeit an der Fähigkeit zur Wechselwirkung hängt, sind es im Grunde genau solche Änderungen, die ein Maß für die Lokalisierung des Teilchens liefern. Wir können uns diese Änderungen in geeigneter Weise quantitativ mit einer Maßzahl vergleichbar gemacht denken, etwa zwischen zwei Extremwerten liegend: 0 bedeute keine Änderung und 1 die maximale Änderung. Es gilt dann, mit Hilfe der Theorie - und prinzipiell nur mit ihr - aus obiger Maßzahl die Lokalisierung des Teilchens - was immer das heißen mag - zu bestimmen. Dies ist in der klassischen Mechanik möglich - man denke an die Himmelsmechanik, - in der Quantenmechanik für makroskopische Gebiete auch noch. Der Grund liegt darin, daß weitere Wechselwirkungen existieren, die das betrachtete System -relativ zur benötigten Genauigkeit - nur schwach beeinflussen und die eine Zuordnung von Maßzahl und Ort erlauben. Anders liegen die Verhältnisse für mikroskopische Gebiete, dem eigentlichen Bereich der Quantenmechanik. Hier kommt man an den Punkt, wo Ortsangabe und Maßzahl mangels Eichmöglichkeiten identifiziert werden müssen.

Solche Überlegungen sind nicht neu und nicht auf Ortsbestimmungen beschränkt. Sie sind jedoch u.E. für ein Konzept der Lokalisierbarkeit relevant. Bei einer solchen Betrachtungsweise verliert nämlich die Ortsmessung grundsätzlich ihren Alternativcharakter. Das Ergebnis einer Ortsmessung sind nicht mehr die Zahlen 0 oder 1, sondern

an ihre Stelle tritt eine Maßzahl, die prinzipiell alle Zwischenwerte annehmen kann. Wir wollen diese Maßzahl, in einer suggestiven Sprechweise, den Lokalisierungsgrad des physikalischen Systems nennen.

In unseren weiteren Überlegungen lassen wir uns von einem möglichen Modell leiten. Wir stellen uns vor, daß ein physikalisches System eine - zumindest in bezug auf seine Lokalisierbarkeit - im Raum verteilte Substanz besitzt. Der Lokalisierungsgrad gibt dann den prozentualen Anteil der in dem betrachteten Raumgebiet lokalisierten Substanz an. Nebenbei sei bemerkt, daß Modellvorstellungen dieser Art nicht neu sind: So wird bei FLEMING [8] für die räumlich verteilte Substanz eine Trägheits-, Massen- und Spindichte betrachtet und dafür Ortsoperatoren des jeweiligen Schwerpunktes angegeben. Die in Kap.5 berechneten Ortsoperatoren stimmen mit den Massenmittelpunktsoperatoren von FLEMING [8,9] überein.

Die mathematische Beschreibung des angegebenen Modells mit Hilfe der anerkannten quantentheoretischen Prinzipien erfolgt straight-forward. Seien M ein Gebiet des euklidischen Raums, H der Zustandsraum des zu lokalisierenden physikalischen Systems (H ist also ein separabler komplexer Hilbertraum), f aus H mit Norm 1 ein Zustand und T_M derjenige selbstadjungierte Operator in H , der der Observablen des Lokalisierungsgrades in M entspricht. Der Erwartungswert $\langle f, T_M f \rangle$ ist der gemittelte Wert einer Reihe von Messungen des Lokalisierungsgrades in M , wenn sich das System im Zustand f befindet: Es ist daher $0 \leq \langle f, T_M f \rangle \leq 1$. Aufgrund der Deutung des Lokalisierungsgrades als prozentualer Anteil der in dem betrachteten Raumgebiet befindlichen Substanz, liegt es nahe, die Additivität dieser Größe zu fordern: Sind M' und M'' disjunkte Raumgebiete und M ihre Vereinigung, so erwarten wir die Gleichheit von $\langle f, T_M f \rangle = \langle f, T_{M'} f \rangle + \langle f, T_{M''} f \rangle$. Außerdem ist offensichtlich $\langle f, T_{\mathbb{R}^3} f \rangle = 1$. Schließlich kommt noch die Forderung nach Kovarianz der Erwartungswerte hinzu, die sich aus der Homogenität und Isotropie des Raumes ergibt: Sei U_P die unitäre Darstellung der (universellen Überlagerungsgruppe der) Poincarégruppe im Zustandsraum H , die nach WIGNER (vgl. z.B. [10]) das Transformationsverhalten des Systems unter Poincarétransformationen beschreibt. Betrachtet man euklidische Transformationen der Zustände und der Observablen, so folgt nach Definition der Erwartungswerte: $\langle f, T_M f \rangle =$

$\langle \hat{f}, T_{(b,B)M} \hat{f} \rangle$ mit $\hat{f} = U_{\tilde{P}}(b,B)f$, $(b,B)M = b+BM$ für (b,B) aus $ISU(2)$ (vgl. (7.5)).

Alle für die Erwartungswerte festgestellten Eigenschaften gelten in bezug auf jeden beliebigen Zustand, so daß daraus die entsprechenden Aussagen für die Lokalisierungsoperatoren selbst folgen.

Def. Ein physikalisches System, das durch die stetige unitäre Darstellung $U_{\tilde{P}}$ der universellen Überlagerungsgruppe $\tilde{P}$ der Poincarégruppe in dem separablen Hilbertraum H repräsentiert wird, heißt lokalisierbar, wenn es eine Abbildung T von der σ -Algebra $B(\mathbb{R}^3)$ der Borelmengen des $\mathbb{R}^3$ in die Menge der stetigen positiven Operatoren in H mit folgenden Eigenschaften gibt:

- i) $T_{\mathbb{R}^3} = 1$,
- ii) $T_{\bigcup_i M_i} = \sum_i T_{M_i}$ (im Sinne der starken Operator-topologie) für jede Folge (M_i) paarweise disjunkter Borelmengen
- iii) $U_{\tilde{P}}(b,B) T_M U_{\tilde{P}}(b,B)^{-1} = T_{(b,B)M}$ mit $(b,B)M = b+BM$ (vgl. (7.5)) für (b,B) aus $ISU(2)$, M aus $B(\mathbb{R}^3)$

T_M heißt der Lokalisierungsoperator für das Raumgebiet M aus $B(\mathbb{R}^3)$; er beschreibt die Observable des Lokalisierungsgrades in M , d.i. der prozentuale Anteil der in M befindlichen Substanz des Systems. Das Paar $(U_{\tilde{P}}, T)$ heißt eine Lokalisierung des Systems.⁺⁾

Mathematische Objekte obiger Art behandeln wir in Kap.6 ausführlich. T ist aufgrund der Eigenschaften (2.1i,ii) ein POV-Maß auf $\mathbb{R}^3$ in H , die Eigenschaft (2.1iii) besagt seine Kovarianz unter $U := U_{\tilde{P}}/ISU(2)$. (U, T) heißt das zur Lokalisierung $(U_{\tilde{P}}, T)$ gehörige euklidische Kovari-

⁺⁾ Dankenswerterweise haben wir von Hrn. Dr.W.Ochs nach Fertigstellung der Arbeit erfahren, daß KRAUS [34] angekündigt hat, in Anschluß an Untersuchungen über Operationen und Effekte als eine Anwendung davon ebenfalls ein Lokalisierungskonzept für masselose Elementarsysteme auf der Grundlage von Def.(2.1) zu entwickeln. (Vgl. dazu die ergänzenden Bemerkungen auf Seite 83.)

anzsystem zu $(ISU(2), \mathbb{R}^3)$ in H (vgl. (6.5)); die Begriffe Irreduzibilität und Äquivalenz von Lokalisierungen beziehen sich auf die zugehörigen Kovarianzsysteme. Definition und Eigenschaften der $ISU(2)$, der universellen Überlagerungsgruppe der euklidischen Gruppe, findet man in Kap. 7.3. Die Gruppe operiert mittels des Überlagerungshomomorphismus in kanonischer Weise auf dem $\mathbb{R}^3$: So ist $(b, B)M$ das mit $\wedge(B)$ aus $SO(3)$ gedrehte und anschließend um b aus $\mathbb{R}^3$ translatierte Gebiet M des Raumes.

Aus physikalischen Gründen ist man geneigt, die Definition einer Lokalisierung in zwei Punkten abzuschwächen, und zwar indem man erstens die Lokalisierungsoperatoren lediglich für quaderförmige Gebiete und endliche Vereinigungen davon definiert, und zweitens anstelle der $\mathcal{G}$ -Additivität lediglich die endliche Additivität der Lokalisierungsoperatoren fordert. Wie der Satz (6.16) jedoch zeigt, verallgemeinert dies den Lokalisierungsbegriff nicht, da sich jeder translationskovariante POV-Inhalt auf den Quadern in eindeutiger Weise zu einem POV-Maß auf allen Borelmengen des $\mathbb{R}^3$ fortsetzen läßt.

Von der Anschauung her sind wir gewohnt, nur dann von der Lokalisierung eines physikalischen Systems, etwa eines Teilchens, zu sprechen, wenn diese in einem endlichen Raumgebiet stattfindet. Wir werden deshalb von einem nichttrivialen Lokalisierungskonzept erwarten, daß es endliche Gebiete des Raumes gibt, für die die zugehörigen Lokalisierungsoperatoren nicht verschwinden. Im Fall (2.1) gilt die folgende weitergehende Aussage.

Satz. Es gelte (2.1). Dann ist $T_M \neq 0$ genau für jede Borelmenge M (2.2) vom Lebesguemaß größer Null.

Beweis. Zuerst konstruieren wir ein Kontrollmaß zu T , d.i. ein Wahrscheinlichkeitsmaß m auf $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft: $T_M = 0 \iff m(M) = 0$, M aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$. Dann zeigen wir die Äquivalenz des Kontrollmaßes mit dem Lebesguemaß.

Sei (f_n) eine ONB von H . Dann ist $m_n, m_n(M) := \langle f_n, T_M f_n \rangle$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^3$, n aus $\mathbb{N}$, und für m setzen wir $\sum_n 2^{-n} m_n$. Offensichtlich ist $m(M) = 0$ für $T_M = 0$. Aus $m(M) = 0$ folgt $m_n(M) = 0$, d.h. $0 = \langle f_n, T_M f_n \rangle = \|T_M^{1/2} f_n\|^2$; damit ist $T_M^{1/2} f_n = 0$, n aus $\mathbb{N}$, woraus $T_M^{1/2} = 0$ folgt. Nun ist m nichttrivial und wegen der $\mathcal{G}$ -Kompaktheit von $\mathbb{R}^3$ nach [15; Kap. II, Th. 1.2] ein reguläres Borelmaß.

Wegen (2.1iii) ist m quasiinvariant unter $ISU(2)$. Unter Verwendung von (6.10) folgt damit aus [18; (2.70a)] die Äquivalenz von m mit dem Lebesguemaß.

Physikalisch interpretiert besagt (2.2), daß jedes Raumgebiet mit Volumen von einem lokalisierbaren System erfüllt werden kann.

Der wichtige Spezialfall von (2.1), daß alle Lokalisierungsoperatoren orthogonale Projektoren sind, ergibt das Lokalisierungskonzept von WIGHTMAN [4]. T ist dann ein PV-Maß - wir wollen es zur Unterscheidung mit E bezeichnen - und (U, E) ein Imprimitivitätssystem. Für E folgen aus (2.1ii) die bemerkenswerten Eigenschaften

$$(2.3a) \quad \bigcap_i E_{M_i} = E_{\bigcap_i M_i} \quad \text{für jede Folge } (M_i) \text{ aus } B(\mathbb{R}^3),$$

$$(2.3b) \quad E_M E_{M'} = E_{M \cap M'}, \quad M, M' \text{ aus } B(\mathbb{R}^3) \quad \text{und daher}$$

$$(2.3c) \quad E_M \perp E_{M'}, \quad \text{für } M \cap M' = \emptyset.$$

Aus (2.3b) folgt insbesondere die Verträglichkeit aller Ortsmessungen. Das Ergebnis einer Ortsmessung ist stets eine der beiden Zahlen 0 oder 1, d.h. die gesamte Substanz des Systems befindet sich entweder vollständig innerhalb oder vollständig außerhalb des betrachteten Raumgebiets. Da ein von Null verschiedener Projektor stets einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 besitzt, gibt es nach (2.2) zu jedem Raumgebiet M mit Volumen einen Zustand des Systems, in dem die gesamte Substanz mit Sicherheit in M anzutreffen ist. Genau solche Zustände sind offensichtlich auch für einen allgemeinen Lokalisierungsoperator die Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Das führt zu folgender Definition, der wir ein paar einfache Folgerungen anschließen.

Def. und Satz. Es gelte (2.1), M sei aus $B(\mathbb{R}^3)$. Einen Zustand, der Eigenvektor zum Eigenwert 1 des Lokalisierungsoperators T_M ist, nennen wir in M strikt lokalisiert; 1T_M bezeichne die orthogonale Projektion in H auf den Unterraum der in M strikt lokalisierten Zustände. Dann gilt:

$$(2.4) \quad i) \quad {}^1T_M = \lim_n (T_M)^n \quad (\text{im Sinne der starken Operator-topologie}),$$

$$ii) \quad {}^1T_{\mathbb{R}^3} = 1,$$

$$iii) \quad \bigcap_i {}^1T_{M_i} = {}^1T_{\bigcap_i M_i} \quad \text{für jede Folge } (M_i) \text{ aus } B(\mathbb{R}^3),$$

$$\text{iv)} \quad {}^1T_M \perp {}^1T_{M'}, \quad \text{für } M \cap M' = \emptyset,$$

$$(2.4) \quad \text{v)} \quad U_{\tilde{P}}(b, B) {}^1T_M U_{\tilde{P}}(b, B)^{-1} = {}^1T_{(b, B)M} \quad \text{für } (b, B) \text{ aus } \text{ISU}(2).$$

Beweis. i) folgt direkt aus $\|T_M\| \leq 1$; ii)-v) rechnet man direkt nach, am einfachsten mit Hilfe von (6.7). ■

Wie man sich leicht überlegt, ist 1T genau dann ein PV-Maß, wenn bereits T ein solches ist. Anstelle der Additivität gilt für 1T i.allg. nur die Supraadditivität: ${}^1T_M + {}^1T_{M'} \leq {}^1T_{M \cup M'}$ für $M \cap M' = \emptyset$.

Die Eigenschaften (2.4iv,v) besagen, daß strikt lokalisierte Zustände genau die Orthogonalitäts- und Kovarianzforderungen von NEWTON und WIGNER [3] erfüllen. (2.4ii) ist die triviale Aussage, daß jeder Zustand irgendwo im Raum strikt lokalisiert ist, und (2.4iii) bedeutet, daß ein Zustand, der in zwei Raumgebieten gleichzeitig strikt lokalisiert ist, bereits im Durchschnitt der beiden Gebiete strikt lokalisiert ist. Die letzte Aussage ist im Bild der lokalisierten Substanz selbstverständlich.

Ein Paar bestehend aus einer unitären stetigen Darstellung $U_{\tilde{P}}$ und einer projektorwertigen Mengenfunktion F auf $B(\mathbb{R}^3)$, das die Eigenschaften (2.4ii-v) besitzt, definiert die sog. schwache Lokalisierbarkeit nach JAUCH und PIRON [6]. Der folgende Hilfssatz zeigt jedoch, warum man für masselose Elementarsysteme mit von Null verschiedener Helizität - das sind unter den bekannten Teilchen das Neutrino, das Antineutrino, das Photon scharfer Helizität und vielleicht das Graviton - mit der Lokalisierung nach [4] und ihrer Verallgemeinerung nach [6] nicht auskommt.

Hilfssatz zur Lokalisierbarkeit. Sei $U_{\tilde{P}} = U_{\tilde{P}}^{(0,m)}$ mit $m = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$

(vgl. (7.62b)), d.h. das durch $U_{\tilde{P}}$ repräsentierte System ist elementar, masselos und besitzt die Helizität m . Ist P eine

(2.5) orthogonale Projektion im Darstellungsraum von $U_{\tilde{P}}$, die mit $U_{\tilde{P}}/\text{SU}(2)$ vertauscht und für die ein $r \geq 0$ existiert derart, daß $U_{\tilde{P}}(b) P U_{\tilde{P}}(b)^{-1} \perp P$ für alle b aus $\mathbb{R}^3$ mit $|b| \geq r$, so ist $P = 0$.

Beweis. Nach (7.65) ist $U_{\tilde{P}}/\text{ISU}(2) \cong U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}$ (vgl. (7.41)). Sei P' die unitär transformierte Projektion P in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, die die entsprechenden obigen Eigenschaften in bezug auf $U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}$ besitzt. Angenommen $P' \neq 0$. Da P' die Darstellung $U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}/\text{SU}(2)$ reduziert, gibt es

nach (7.46) ein R aus $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $\|R\|=1$, und j aus $\mathbb{N}_0 + |m|$ derart, daß $P'(R \times Y_{mm'}^{(j)}) = R \times Y_{mm'}^{(j)}$ für alle $m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ (vgl. (7.30)). Wegen der vorausgesetzten Orthogonalitätseigenschaft ist $o = \langle U_{ISU(2)}^{(m)}(b)(R \times Y_{mm'}^{(j)}), R \times Y_{mm'}^{(j)} \rangle = \int e^{-ibs} |R(|s|) Y_{mm'}^{(j)}(s/|s|)|^2 ds$ für alle b aus $\mathbb{R}^3$ mit $|b| \geq r$, weshalb nach einem bekannten Satz über die Fouriertransformation (s. [29; Th.26.11]) $F_m: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $F_m(s) := |R(|s|) Y_{mm'}^{(j)}(s/|s|)|^2$, $m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$, fortsetzbar zu einer ganzen Funktion auf $\mathbb{C}^3$ ist. Nach (7.7), (7.23) und (7.22) ist $F_m(s) = (2j+1)2^{-2|m|} |R(|s|)|^2 (1+s_3/|s|)^{2|m|} (P_{j-m}^{(o, 2|m|)}(s_3/|s|))^2$. Indem man zunächst $s_2 = s_3 = 0$ setzt, erkennt man, daß $s \mapsto |R(|s|)|^2$ eine Fortsetzung hat der Form $(z_1, z_2, z_3) \mapsto f(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$ mit einer ganzen Funktion f auf $\mathbb{C}$. Damit hat der Quotient q aus der Fortsetzung von F_m und der Fortsetzung des Radialanteils an der Stelle o aus $\mathbb{C}^3$ einen Pol oder er ist dort stetig. Ein Pol scheidet aus, da für $s_1 = 0$, $s_2 = s_3 = x$ beim Grenzübergang $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, auch $s \rightarrow 0$ und mit $|s_3/|s|| = 2^{-1/2}$ auch $q(s)$ beschränkt bleibt. Aus der Stetigkeit im Nullpunkt folgt für $s_1 = 0$, $s_2 = x(1-a^2)^{1/2}/a$, $s_3 = x$ durch Grenzübergang $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$: $q(o) = (1+a)^{2|m|} (P_{j-m}^{(o, 2|m|)}(a))^2$ für $0 < |a| \leq 1$. Die rechte Seite ist also ein konstantes Polynom, woraus $m=0$ (und zudem $j=0$) folgt. ■

Sei nun F eine projektorwertige Mengenfunktion, die die schwache Lokalisierbarkeit nach [6] für ein masseloses Elementarsystem mit von Null verschiedener Helizität definiert. Dann verschwindet nach (2.5) aufgrund von (2.4iv,v) der Lokalisierungsoperator F_K zu jeder Kugel K um den Ursprung, und wegen (2.4v) zu jeder Kugel und damit aus Monotoniegründen zu jedem beschränkten Raumgebiet. Eine solche Lokalisierung ist aber trivial. Daraus folgt in Verbindung mit (2.2) sofort, daß eine Lokalisierung nach [4] für masselose Elementarsysteme mit von Null verschiedener Helizität nicht existiert. Für solche Systeme gibt es jedoch - wie wir in Kap. 4 sehen werden - eine Lokalisierung nach (2.1); diese ist nach (2.2) von vornherein nicht trivial. Dabei kann es, wie aus (2.5) und dem (2.5) Vorgehenden folgt, keine in beschränkten Raumgebieten strikt lokalisierten Zustände geben. Dies ist der wesentliche Punkt, der eine Verallgemeinerung des Lokalisierungsbegriffs in Richtung (2.1) notwendig macht. Ein weiteres Argument dafür werden wir in (2.8)ff. kennenlernen.

Bemerkung. Die Nichtexistenz von Lokalisierungen nach [4] für masselose Elementarsysteme mit von Null verschiedener Helizität wird be-

reits in [4] bewiesen. Daß sich solche Systeme auch nicht schwach lokalisieren lassen, wird in [7] und [11] bewiesen; doch sind die Beweise dort u.E. nicht vollständig.

In unserem Modell bedeutet die Nichtexistenz von strikt lokalisierten Zuständen in einem Raumgebiet M , daß das physikalische System nicht so präpariert werden kann, daß seine Substanz v o l l s t ä n d i g in M konzentriert ist. Es ist naheliegend zu fragen, in welchem Maß dies geschehen kann. Dazu die folgende

Def. Sei $(U_{\tilde{P}}, T)$ eine Lokalisierung nach (2.1). Dann heißt das zugehörige physikalische System in dem Raumgebiet M , M aus $B(\mathbb{R}^3)$, konzentrierbar, wenn $\|T_M\| = 1$.

Um (2.6) zu interpretieren, benutzen wir (s. [30; IV. (51)]):

$$\|T_M\| = 1 \iff \sup\{\langle f, T_M f \rangle : f \text{ aus } H, \|f\| = 1\} = 1.$$

Die Konzentrierbarkeit des Systems in M bedeutet also, daß der prozentuale Anteil der Substanz des Systems, der sich in M befindet, durch Präparation beliebig groß gemacht werden kann. Existiert ein in M strikt lokalisierter Zustand, so ist das System offensichtlich in M konzentrierbar. Die umgekehrte Aussage gilt i.allg. nicht. Von der experimentellen Praxis jedoch gesehen, besteht der Unterschied zwischen dem Begriff der strikten Lokalisierbarkeit und dem der Konzentrierbarkeit lediglich in einer mehr oder minder starken Idealisierung. Wegen (2.5)ff. sind wir deshalb an Lokalisierungen interessiert, die die Konzentrierbarkeitsbedingung für beschränkte Raumgebiete erfüllen. Die folgende Definition mit Satz gibt dafür ein allgemeines Kriterium.

Def. und Satz. Sei $(U_{\tilde{P}}, T)$ eine Lokalisierung nach (2.1). Gibt es eine stetige unitäre Darstellung $U_{\text{IDSU}(2)}$ der universellen Überlagerungsgruppe $\text{IDSU}(2)$ der euklidischen Gruppe mit Dilatationen (s.Kap.7.9), für die gilt:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \text{i)} \quad & U_{\text{IDSU}(2)} / \text{ISU}(2) = U_{\tilde{P}} / \text{ISU}(2), \\ \text{ii)} \quad & U_{\text{IDSU}(2)}(o, r1) T_M U_{\text{IDSU}(2)}(o, r1)^{-1} = T_{rM} \\ & \text{für alle } r \text{ aus } \mathbb{R}_+, M \text{ aus } B(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

(2.7) so heißt $(U_{\mathcal{V}}, T)$ dilatationskovariant. In diesem Fall ist $\|T_M\| = 1$ für jedes M aus $B(\mathbb{R}^3)$ mit nichtleerem Inneren.

Beweis. Wir schreiben im folgenden kurz r für $(0, r1)$ und $U_{(D)}$ für $U_{\text{IDSU}(2)}$. Sei M aus $B(\mathbb{R}^3)$ mit nichtleerem Inneren. M enthält eine offene Kugel: Aus Gründen der Monotonie und der Translationskovarianz (s. (2.1iii)) genügt es, die Behauptung für eine Kugel K um den Ursprung zu beweisen. Setze $M_1 := K$, $M_{n+1} := (n+1)K \setminus nK$, n aus $\mathbb{N}$. Wegen $\mathbb{R}^3 = \bigcup_n nK$, $nK = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$, folgt aus (2.1i, ii): $1 = \sum_i T_{M_i} = T_{nK} + \sum_{i \geq n+1} T_{M_i}$, weshalb $1 = \lim_n T_{nK}$ im Sinne der starken Operatortopologie. Damit ist $1 = \lim_n \|T_{nK}\|$. Andererseits ist $T_{nK} = U_{(D)}(n) T_K U_{(D)}(n)^{-1}$, woraus $\|T_{nK}\| = \|T_K\|$ folgt. ■

Unter den Voraussetzungen von (2.7), die - wie wir sehen werden - uns schwer zu erfüllen sind, ist das physikalische System in jeder Kugel konzentrierbar. Dies ist ein von der Anschauung her voll befriedigendes Ergebnis. Der Beweis zu (2.7) zeigt auch, wie man sich im Fall einer dilatationskovarianten Lokalisierung alle in einem Raumgebiet (mit nicht leerem Inneren) "gut" lokalisierten Zustände verschaffen kann. Betrachten wir der Einfachheit halber wieder eine Kugel K um den Ursprung, und sei f aus H mit Norm 1 ein beliebiger Zustand. Dann ist aufgrund der obigen Überlegungen $1 = \lim_{r \downarrow 0} \langle U_{(D)}(r)f, T_K U_{(D)}(r)f \rangle$, was bedeutet, daß für hinreichend kleine Dilatationen r der Zustand $U_{(D)}(r)f$ einen Lokalisierungsgrad beliebig nahe bei 1 besitzt. (Umgekehrt läßt sich natürlich jeder Zustand in der Form $U_{(D)}(r)f$ schreiben.) Für den Fall eines Elementarsystems wollen wir diese Zustände genauer betrachten. Im Ortsraum ist der Zustand eine Funktion g aus $L^2(\mathbb{R}^3, c^{2l+1})$, wobei l im massiven Fall den Spin j bezeichnet und im masselosen Fall gleich 0 ist. Der dilatierter Zustand wird dann nach (7.49b), (7.50), (7.53), (7.64) und (7.65) durch die Funktion $x \mapsto r^{-3/2} g(r^{-1}x)$ dargestellt. Als L^2 -Funktion verschwindet g im Unendlichen hinreichend rasch. Die dilatierter Funktion zeigt dieses Verhalten in stärkerem Maß: Anschaulich gesprochen, wird g im Fall $r < 1$ in der Umgebung des Nullpunktes kontrahiert und überhöht. Dies entspricht genau der Vorstellung der Konzentrierbarkeit des Systems in der Kugel K .

Man bemerkt, daß die Menge der (dilatationskovarianten) Lokalisierungen

gen eines physikalischen Systems konvex ist: Sind $(U_{\tilde{P}}, T)$ und $(U_{\tilde{P}}, T')$ zwei (dilatationskovariante) Lokalisierungen des durch $U_{\tilde{P}}$ repräsentierten physikalischen Systems und a, a' nichtnegative reelle Zahlen mit $a+a'=1$, so ist die konvexe Linearkombination $(U_{\tilde{P}}, aT+a'T')$ ebenfalls eine (dilatationskovariante) Lokalisierung.

Def. Die Extrempunkte der konvexen Menge der (dilatationskovarianten) Lokalisierungen eines physikalischen Systems nennen wir reine (dilatationskovariante) Lokalisierungen.

Damit läßt sich also eine reine (dilatationskovariante) Lokalisierung nicht als konvexe Linearkombination zweier von ihr verschiedener (dilatationskovarianter) Lokalisierungen schreiben. Rein ist jede Lokalisierung $(U_{\tilde{P}}, E)$ mit E ein PV-Maß, d.h. jede Lokalisierung nach WIGHTMAN [4]: Denn aus $E_M = a_1 T_{1,M} + a_2 T_{2,M}$ mit $a_1, a_2 \neq 0$ folgt $0 = a_1 \langle f, T_{1,M}^f \rangle + a_2 \langle f, T_{2,M}^f \rangle \implies \langle f, T_{i,M}^f \rangle = \|T_{i,M}^{1/2} f\|^2 = 0 \implies T_{i,M}^f = 0$ für f aus $E_M(H)^\perp$ und entsprechend (bei Betrachtung von $1-E_M$ anstelle von E_M) $T_{i,M}^f = f$ für f aus $E_M(H)$, weshalb $T_{i,M} = E_M$, $i=1,2$. I.allg. gibt es jedoch auch reine dilatationskovariante Lokalisierungen mit POV-Maßen, die keine PV-Maße sind (s.Kap.4.2). Die Bedeutung der reinen Lokalisierungen entspricht genau der der reinen Zustände: Denn wie wir in Kap.4.2 zeigen werden, ist jede dilatationskovariante Lokalisierung eines masselosen Elementarsystems eine abzählbare konvexe Linearkombination von reinen dilatationskovarianten Lokalisierungen.

Abschließend zitieren wir noch eine Arbeit von HEGERFELDT [12], die sich mit den Schwierigkeiten beschäftigt, die sich aus der Forderung von Lokalisierbarkeit und Kausalität ergeben. Unter relativ schwachen Voraussetzungen wird gezeigt, daß für elementare Systeme die Zeitentwicklung striktlokalisierter Zustände nicht kausal verläuft. (Der Beweis basiert auf dem bereits in (2.5) verwendeten Satz über die Fouriertransformation.) Auch unter diesem Gesichtspunkt ist eine Verallgemeinerung des Lokalisierungskonzepts in Richtung (2.1) - d.h. die Einführung eines Lokalisierungsgrads - notwendig. Diesen Problemkreis werden wir jedoch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgen.

3 Lokalisierung und relativistische Invarianz

In der Literatur ist das Relativitätsprinzip gerade im Zusammenhang mit dem Begriff der Lokalisierbarkeit physikalischer Systeme häufig diskutiert worden. Dieser wichtige Punkt hat u.E. oft zu Mißverständnissen Anlass gegeben. Der Grund dafür liegt in zwei verschiedenen Auffassungen von relativistischer Invarianz. Sie sind charakterisiert durch die Begriffe 'manifeste Lorentzkovarianz' und 'relativistische Symmetrie'. Der erste Begriff wird unterschiedlich verstanden. Er betrifft in jedem Fall ein gewisses Transformationsverhalten der betrachteten physikalischen Größen, das die zugrunde liegende Raum-Zeit-Transformation in suggestiver Weise widerspiegeln soll. Für relativistische Ortsoperatoren findet man hierzu mehrere Definitionen. Seit der klassischen Arbeit von NEWTON und WIGNER [3], in der die Meinung vertreten wird, daß die dort konstruierten Ortsoperatoren keine einfache kovariante Deutung in bezug auf eine relativistische Transformation besitzen, fehlt es nicht an Versuchen, das Lokalisierungsproblem manifest kovariant zu formulieren (s. den Übersichtsartikel [1]). Eine manifest kovariante Formulierung unseres Lokalisierungskonzepts geben wir in Kap.3.2. Physikalisch relevant ist jedoch allein die zweite Auffassung von relativistischer Invarianz. Wir wollen uns deshalb zuerst mit ihr beschäftigen (vgl. auch [7; Kap.VIII 1]).

3.1 Relativistische Symmetrie. Die Forderung nach relativistischer Symmetrie leitet sich direkt aus dem Relativitätsprinzip ab, wonach alle Inertialsysteme physikalisch äquivalent sind. Es beinhaltet die prinzipielle Ununterscheidbarkeit verschiedener Poincarésysteme in bezug auf die geltenden physikalischen Gesetze. Für die Quantentheorie ergibt sich daraus nach WIGNER (z.B. [10]) die Folgerung, daß der Hilbertraum der Zustände eines physikalischen Systems der Darstellungsraum einer unitären stetigen Darstellung U der Gruppe aller relativistischer Transformationen ist. Die nun folgenden Überlegungen bis einschließlich (3.3) erläutern größtenteils diese Aussage und betreffen das Lokalisierungsproblem nicht speziell (insbesondere (3.3) ist von dieser Art). Wir sind jedoch der Meinung, daß sie unseren Standpunkt verdeutlichen, und haben deshalb nicht auf sie verzichtet.

Die genannte Darstellung U liefert das Transformationsverhalten für die physikalischen Größen beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen:

Poincarésystem	I_0, I_1	I_a, A_I
Ereignis	x	$x^{I_a, A_I} = (a, A)x$
Poincarétransformation	(x, X)	$(x, X)^{I_a, A_I} = (a, A)(x, X)(a, A)^{-1}$
(3.1) Zustand	f	$f^{I_a, A_I} = U(a, A)f$
Observable	Q	$Q^{I_a, A_I} = U(a, A)QU(a, A)^{-1}$

Dabei bezeichnet I_a, A_I dasjenige Poincarésystem, in welchem $(a, A)x = a + \bigwedge(A)x$ den gleichen Raum-Zeit-Punkt beschreibt wie x in dem fest gewählten System I_0, I_1 . Um es zu betonen: f und $f^{I_a, A_I} = U(a, A)f$ beschreiben den gleichen Zustand des Systems, das einmal von I_0, I_1 und ein andermal von I_a, A_I aus betrachtet wird. U liefert aber auch die Beschreibung der aktiven Zustandstransformationen. In diesem Fall bleibt das Bezugssystem I_0, I_1 ungeändert, und $U(a, A)f$ ist der neue Zustand des physikalischen Systems, nachdem es der Transformation (a, A) unterworfen worden ist.

Wir wenden uns dem Nachweis zu, daß das in Kap.2 entwickelte Konzept der Lokalisierung eines physikalischen Systems dem Relativitätsprinzip genügt. Zunächst ergänzen wir die in (2.1) gegebene Definition einer Lokalisierung (U, T) durch die Angabe ihrer Zeitentwicklung. Wir haben bisher stillschweigend angenommen, daß die Ortsmessungen zu einem festen Zeitpunkt, etwa $t=0$, erfolgen. Zu einem anderen Zeitpunkt t sei die Lokalisierung (U, T_t) . Nach dem zu (3.1)ff. Gesagten ist

$$(3.2) \quad T_{t, M} = U(t)T_M U(t)^{-1}, \quad t \text{ aus } \mathbb{R}; M \text{ aus } B(\mathbb{R}^3).$$

Eine Lokalisierung bezieht sich stets auf ein Poincarésystem, nämlich auf dasjenige, von dem aus die Ortsmessungen beschrieben werden. Wir machen dies in der Notation dadurch deutlich, daß wir das Bezugssystem als Index angeben: $(U_{I_a, A_I}, T_{t, I_a, A_I})$ sei die in I_a, A_I durchgeführte und von I_a, A_I aus beobachtete Lokalisierung des betrachteten physikalischen Systems, also U_{I_a, A_I} bzw. T_{t, I_a, A_I} die in

I_a, AI durchgeführten und von dort aus auch beobachteten aktiven Zustandstransformationen bzw. Ortsmessungen beschreibt; insbesondere werden das Raumgebiet M und die Zeit t in $T_{t, M, I_a, AI}$ in bezug auf I_a, AI beschrieben. In welcher Beziehung stehen nun $U_{I_o, 1I} = U$ und $U_{I_a, AI}$ zueinander? Die zu $(x, X)^{I_o, 1I} = (x, X)$ gehörende aktive Zustandstransformation lautet in $I_o, 1I$: $f \mapsto U(x, X)f$, in I_a, AI : $f^{I_a, AI} \mapsto U_{I_a, AI}((x, X)^{I_a, AI})f^{I_a, AI}$. Es ist daher $(U(x, X)f)^{I_a, AI} = U_{I_a, AI}((x, X)^{I_a, AI})f^{I_a, AI}$. Daraus folgt mit Hilfe von (3.1) für $(x, X) = (a, A)$, daß $U(a, A) = U_{I_a, AI}(a, A)$ und damit allgemein

$$(3.3) \quad U_{I_a, AI} = U, \quad (a, A) \text{ aus } \tilde{P}.$$

Die aktiven Zustandstransformationen werden also in jedem Poincarésystem durch die gleichen unitären Operatoren beschrieben. Insbesondere gilt dies für die euklidischen Bewegungen, so daß wir widerspruchsfrei zu (2.1) definieren können:

$$(3.4) \quad T_{t, I_a, AI} := T_t, \quad t \text{ aus } \mathbb{R}, (a, A) \text{ aus } \tilde{P},$$

mit $T_t = T_{t, I_o, 1I}$. Damit ist die Lokalisierung eines physikalischen Systems in jedem Poincarésystem die gleiche, m.a.W. Poincarésysteme werden hinsichtlich der Lokalisierung nicht unterschieden. Das Lokalisierungskonzept genügt also dem Relativitätsprinzip.

Aus (3.4) folgt natürlich auch, daß der zu einer Lokalisierung gehörige Ortsoperator (vgl. Kap. 5) für jedes Poincarésystem der gleiche ist. Die drei Komponenten des Ortsoperators beziehen sich dabei - überflüssig zu sagen - auf die entsprechenden Raumkoordinaten des jeweiligen Bezugssystems.

3.2 Lokalisierung auf raumartigen Hyperebenen und manifest poincarékovariante Formulierung. Sei R der Ortsraum (zur Zeit $t=0$) des Bezugssystems $I_o, 1I$, beschrieben in Koordinaten des Systems $I_o, 1I$. Dann ist nach (3.1) $R^{I_a, AI} = (a, A)R$ der Ortsraum von $I_o, 1I$ beschrieben in Koordinaten des Systems I_a, AI und damit $(a, A)^{-1}R$ der Ortsraum von I_a, AI beschrieben in Koordinaten von $I_o, 1I$. (Der Ortsraum von I_a, AI beschrieben in Koordinaten von I_a, AI ist natürlich gleich R .) $(a, A)^{-1}R$ ist ein Raum-Zeit-Gebiet in bezug auf $I_o, 1I$, so daß hierfür eine Lokalisierung zunächst nicht definiert ist. Es liegt jedoch nahe, eine Lokalisierung in $(a, A)^{-1}R$ dadurch zu erklären,

daß man sie in I_{α}, A_I durchführt, Zustand und Observable jedoch von I_0, I_I aus beschreibt. Dies führt zu der folgenden Definition von Lokalisierungsoperatoren für jede Borelmenge einer raumartigen Hyperfläche:

$$(3.5) \quad T_N := T_{N, I_0, I_I} := U(a, A)^{-1} T_M U(a, A) \quad \text{mit } N = (a, A)^{-1} M$$

für alle Borelmengen $M \subset R$ und (a, A) aus $\tilde{P}$.

Wir müssen uns vergewissern, daß diese Definition nicht von der Darstellung des Raum-Zeit-Gebietes N abhängt: Sei $N = (a', A')^{-1} M'$ mit $M' \subset R$ Borelmenge und (a', A') aus $\tilde{P}$. Dann ist $M' = (a'', A'') M$ mit $(a'', A'') = (a', A')(a, A)^{-1}$ aus $\tilde{P}$. Ist M in einer Ebene des Ortsraums enthalten, so ist dies auch M' , weil (a'', A'') eine affine Abbildung ist. Damit sind M und M' Nullmengen des dreidimensionalen Lebesguemaßes und daher nach (2.2) $T_M = T_{M'} = 0$. In beiden Fällen ist also auch $T_N = 0$. Ist dagegen M in keiner Ebene enthalten, so ist - wie man sich leicht überlegt - (a'', A'') eine euklidische Transformation und daher $U(a, A)^{-1} T_M U(a, A) = U(a', A')^{-1} U(a'', A'') T_M \cdot U(a'', A'')^{-1} U(a', A') = U(a', A')^{-1} T_{M'} U(a', A')$.

Mit (3.5) ist es nun nicht schwer, die manifest poincarékovariante Beziehung

$$(3.6) \quad T_{(x, X)N, I_{\alpha}, A_I} = U_{I_{\alpha}, A_I}(x, X) T_{N, I_{\alpha}, A_I} U_{I_{\alpha}, A_I}(x, X)^{-1},$$

N Borelmenge einer raumartigen Hyperfläche,
 $(x, X), (a, A)$ aus $\tilde{P}$,

nachzuweisen. Der Index I_{α}, A_I bedeutet dabei, wie schon zuvor, daß der Zustand, die Lokalisierungsobservable und das Lokalisierungsgebiet vom Bezugssystem I_{α}, A_I aus beschrieben werden: Klarerweise ist $T_{I_{\alpha}, A_I} = T$ (vgl. (3.4)). Ferner erübrigt sich, die Zeitentwicklung eigens zu diskutieren, da sie aufgrund der Übereinstimmung von (3.2) und (3.5) als Spezialfall in (3.6) enthalten ist.

4 Konstruktion der Lokalisierungen.

In 4.1 erläutern wir eine allgemeine Konstruktionsmethode für Lokalisierungen, die auch deren vollständige Charakterisierung erlaubt. Die dazu benötigten mathematischen Begriffe und Aussagen werden in Kap.6 abgehandelt. In Kap.4.2 wenden wir diese Methode auf elementare Systeme und auf das zweikomponentige Photon an. Wir werden uns dabei auf dilatationskovariante Lokalisierungen beschränken: Die zusätzliche Dilatationskovarianz eines physikalischen Systems gewährleistet nämlich die Konzentrierbarkeitseigenschaft für jedes Raumgebiet mit nichtleerem Inneren (vgl.(2.7)). Das bedeutet natürlich nicht, daß nicht-dilatationskovariante Lokalisierungen keine physikalische Bedeutung besitzen. Sie sind vielmehr offensichtlich dazu geeignet, Systeme mit einer spezifischen inneren Struktur zu beschreiben, wie etwa - als einfachstes Beispiel - eine feste räumliche Ausdehnung. Dies wollen wir jedoch hier nicht weiter untersuchen. Die für das folgende benötigten darstellungstheoretischen Einzelheiten findet man in Kap.7.

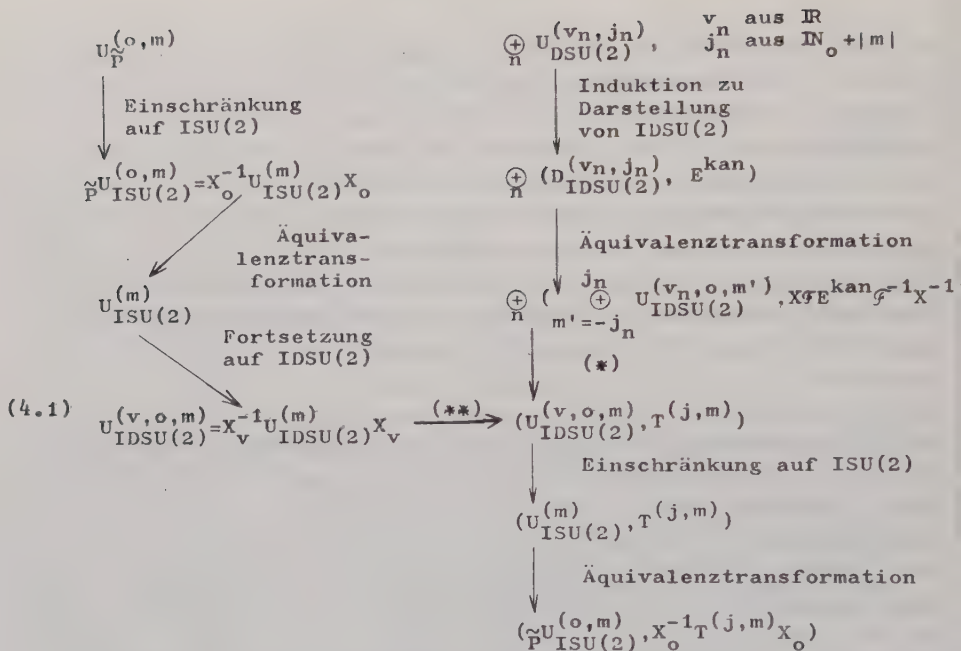
4.1 Allgemeine Konstruktionsmethode für Lokalisierungen. Seien $U_{\tilde{P}}$ die unitäre stetige Darstellung von $\tilde{P}$, die das betrachtete physikalische System repräsentiert, H der separable Darstellungsraum von $U_{\tilde{P}}$ und $U := U_{\tilde{P}}/ISU(2)$. Dazu betrachte man einen separablen Hilbertraum H^+ , der H als Unterraum enthält und die orthogonale Projektion P in H^+ auf H sowie eine unitäre stetige Darstellung V von $ISU(2)$ in H^+ , die durch P zu U reduziert wird, d.h. für die gilt: $Vf = Uf$ für alle f aus H . Ist nun E ein PV-Maß auf $\mathbb{R}^3$ in H^+ , das mittels V unter $ISU(2)$ kovariant ist, d.h. (V, E) ist ein Imprimitivitätssystem zu $(ISU(2), \mathbb{R}^3)$ in H^+ (vgl.(6.5)), so überzeugt man sich leicht, daß $(U_{\tilde{P}}, T)$ mit $T_M f := PE_M f$, f aus H , M aus $B(\mathbb{R}^3)$, eine Lokalisierung des betrachteten Systems ist. Das Entscheidende dabei ist, daß auch die Umkehrung gilt (s.(6.7)): Jede Lokalisierung des Systems läßt sich in der beschriebenen Weise als Projektion eines Imprimitivitätssystems gewinnen. Damit und mit Hilfe des Imprimitivitätstheorems von MACKEY (6.9) erhält man eine vollständige Übersicht über alle Lokalisierungen des Systems (s.(6.11)): Da $SU(2)$ die Stabilitätsgruppe der Operation von $ISU(2)$ auf $\mathbb{R}^3$ im Nullpunkt ist, muß man bis auf Äquivalenz alle stetigen

unitären Darstellungen von $SU(2)$ betrachten mit der Eigenschaft, daß die damit induzierten Darstellungen von $ISU(2)$ die Darstellung U als Unterdarstellung enthalten, und von dem kanonischen PV-Maß, das im induzierten Funktionenraum über $\mathbb{R}^3$ die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion ist, die orthogonale Projektion auf den unter U invarianten Unterraum bilden. Ist man speziell an dilatationskovarianten Lokalisierungen des Systems interessiert, so hat man bis auf Äquivalenz alle stetigen unitären Darstellungsfortsetzungen $U_{(D)}$ von U auf $IDSU(2)$ (vgl. Kap. 7.9) aufzusuchen und obiges Programm mit $U_{(D)}$ bzw. $DSU(2)$ bzw. $IDSU(2)$ anstelle von U bzw. $SU(2)$ bzw. $ISU(2)$ durchzuführen.

4.2 Dilatationskovariante Lokalisierungen elementarer Systeme. Wir wenden das in 4.1 beschriebene Verfahren an, um dilatationskovariante Lokalisierungen elementarer Systeme zu ermitteln. Ein relativistisches physikalisches System heißt dabei nach WIGNER elementar, wenn es durch eine irreduzible unitäre stetige Darstellung der (universellen Überlagerungsgruppe der) Poincarégruppe repräsentiert wird. Wir beschränken uns dabei auf die sog. physikalischen Darstellungen, charakterisiert durch reelle Masse und diskreten Spin; sie sind in (7.62) angegeben. Unser Interesse an dilatationskovarianten Lokalisierungen liegt nicht so sehr an der Eigenschaft der Dilatationskovarianz an sich, als vielmehr an der in (2.7) festgestellten Konsequenz, daß das System in jeder Kugel konzentrierbar ist.

4.2.1 Die dilatationskovarianten Lokalisierungen masseloser Elementarsysteme. Die Konstruktionsmethode aus Kap. 4.1 führt zum Schema (4.1). Beachte dazu die folgenden Erläuterungen.

Sei $m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ Jede Fortsetzung U von $U_{ISU(2)}^{(m)} \cong U_P^{(0,m)}/ISU(2)$ auf $IDSU(2)$ ist äquivalent zu $U_{IDSU(2)}^{(m)}$: Denn als Darstellung einer lokalkompakten Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie in einem separablen Hilbertraum läßt sich U als direktes Integral irreduzibler Darstellungen (7.49) schreiben (s. [23; (4.10)1]), und da ein solches Integral genau dann von der Art (7.42) ist, wenn U äquivalent ist zu $U_{IDSU(2)}^{(m)}$, folgt aus der Eindeutigkeit von (7.42) - $ISU(2)$ ist ja bekanntlich vom Typ I - die Behauptung. Wir müssen also jene durch Induktion einer Darstellung von $DSU(2)$ gewonnenen Darstellungen von $TDSU(2)$ aufsuchen, die einen zu $U_{IDSU(2)}^{(m)}$ äquivalenten und damit auch irreduziblen Summanden haben. Da Induktion und direkte Summenbildung



(*): Spezialfall der Projektion auf die m -te Komponente des n -ten Summanden, $j:=j_n$, $v:=v_n$, $T^{(j,m)} := \text{Pr}_m^j X \otimes E^{kan} \otimes^{-1} X^{-1} \text{In}_m^j$

(**): Ergänzung zu einem Kovarianzsystem

Dabei vgl. der Reihe nach: (7.62b), (7.63), (7.41), (7.65), (7.49a,b) und (7.51)ff. sowie (7.48), (7.50), (7.36), (7.38) und (7.51); ferner ist $\text{Pr}_m^j: L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $\text{Pr}_m^j f := f_m$ und $\text{In}_m^j: L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})$, $\text{In}_m^j f := (\delta_{mm'}, f)$.

vertauschbar sind und der induzierte kontinuierliche Anteil einer Darstellung wieder kontinuierlich ist (vgl. [23; (5.10d)1]), genügt es, bei der Induktion von einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen von $DSU(2)$ mit j aus $\mathbb{N}_o + |m|$ (s. (7.48)) auszugehen (s. (4.1) rechts oben). Die Primary-Komponente zu $U_{IDSU(2)}^{(m)}$ der induzierten Darstellung ist $\oplus_n U_{IDSU(2)}^{(v_n, o, m)}$ in $\oplus_n L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, was zu $1 \otimes U_{IDSU(2)}^{(m)}$ in $1^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, $1^2 := 1^2(N, \mathbb{C})$ mit $N \in \mathbb{N}$ äquivalent ist. Hieraus erkennt

man, daß die irreduziblen Unterräume von $l^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ gleich $\mathbb{C}x \otimes L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ und daher die von $\bigoplus_n L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ gleich $H_z := \{(x_n X_{v_n}^{-1} f) : f \text{ aus } L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})\}$, $z := ((j_n), (v_n), x)$ mit x aus l^2 mit Norm 1, sind. $U_{(D), z}$ sei die reduzierte Darstellung in H_z . Für das zugehörige POV-Maß T_z , daß man als Projektion auf H_z von $\bigoplus_n X \mathcal{G} E^{\text{kan}} \mathcal{G}^{-1} X^{-1}$ erhält, gilt: $\langle (x_n X_{v_n}^{-1} f), T_z (x_n X_{v_n}^{-1} f') \rangle = \sum_n a_n \langle \text{In}_m^{j_n} X_{v_n}^{-1} f, \text{Pr}_m^{j_n} X \mathcal{G} E^{\text{kan}} \mathcal{G}^{-1} X^{-1} \text{In}_m^{j_n} X_{v_n}^{-1} f' \rangle = \sum_n a_n \langle f, X_{v_n} T(j_n, m) X_{v_n}^{-1} f' \rangle$, s. (4.1), $a_n := |x_n|^2 \geq 0$ mit $\sum_n a_n = 1$, f, f' aus $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, weshalb die zugehörige Lokalisierung äquivalent ist zur konvexen Linearkombination $(U_P^{(o, m)}, \sum_n a_n \cdot X_o^{-1} X_{v_n} T(j_n, m) X_{v_n}^{-1} X_o)$.

Wir untersuchen nun die Frage, welche z und z' äquivalente Lokalisierungen liefern. O.B.d.A. können wir nach dem soeben Gezeigten $x_n \neq 0$ und (j_n, v_n) paarweise verschieden annehmen. Nach (6.9) sind die Imprimitivitätssysteme $X \mathcal{G} (D_{\text{ISU}(2)}^{(v_n, j_n)}, E^{\text{kan}}) \mathcal{G}^{-1} X^{-1}$ irreduzibel und paarweise inäquivalent. Ihre direkte Summe ist daher ein Imprimitivitätssystem, mit dem nur Projektoren der Form $(e_n 1)$ mit $e_n = 0, 1$ vertauschen, und das deshalb nach (6.8i) eine minimale Erweiterung seiner Projektion auf H_z ist. Entsprechendes gilt für die gestrichelten Größen. Nach (6.8iii) ergibt sich somit unmittelbar, daß im Fall der Äquivalenz von $(U_{(D), z}, T_z)$ und $(U_{(D), z'}, T_{z'})$ bei geeigneter Umnummerierung $N = N'$ und $j_n = j'_n$, $v_n = v'_n$ für alle n aus N ist. Die Äquivalenz wird durch den - wegen der Irreduzibilität von $U_{(D), z}$ bzw. $U_{(D), z'}$ bis auf eine Phase c eindeutig bestimmten - Isomorphismus $\beta: H_z \rightarrow H_{z'}$, $\beta(x_n X_{v_n}^{-1} f) := c x'_n X_{v_n}^{-1} f$, vermittelt. Damit vermittelt β^+ (s. Beweis von (6.8iii)) die Äquivalenz zwischen den (zusammenfallenden) minimalen Erweiterungen, weshalb $\beta^+ = (c_n 1)$ mit c_n aus $\mathbb{C}$, $|c_n| = 1$. Hieraus folgt durch eine kurze Rechnung: $|x_n| = |x'_n|$ für alle n . Wir erhalten also das folgende Zwischenergebnis: Die Kovariänzsysteeme $(U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, \sum_n a_n X_{v_n} T(j_n, m) X_{v_n}^{-1})$ - mit $a_n \neq 0$ und paarweise verschiedenen Tupeln (j_n, v_n) geschrieben - sind für verschiedene Parameterfolgen (j_n, v_n, a_n) inäquivalent.

Welche Äquivalenzen bestehen jedoch, wenn man die Darstellung $U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}$ auf $\text{ISU}(2)$ einschränkt? In diesem Fall wird die Äquivalenz durch einen Operator Y aus $U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}))$ vermittelt, der mit $U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}$ ver-

tauscht und für den gilt: $(U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, YTY^{-1}) = (U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, T')$ mit $T = \sum_n$.
 $a_n X_{v_n} T^{(j_n, m)} X_{v_n}^{-1}$ und T' entsprechend. Daraus folgt wegen $(o, r)(b, B) = (rb, B)(o, r) = (rb, rB)$, r aus D , (b, B) aus $\text{ISU}(2)$, und wegen der Kovari-
 anzeigenschaft, daß $Y^{-1} U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}(o, r) Y U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}(o, r^{-1}) =: u(r)$ mit
 $(U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, T)$ vertauscht. Da $(U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, T)$ - wie wir anschließend zeigen
 werden - irreduzibel ist, ist $u(r)$ aus $U(1)$. Also gilt $Y^{-1} U_{\text{ISU}(2)}^{(m)} Y =$
 $u U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}$, weshalb u eine eindimensionale Darstellung von D ist und
 deshalb $u = U_D^{(v)}$ für ein v aus $\mathbb{R}$ (s. (7.47)) und Y wegen der Irredu-
 zibilität von $U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}$ (s. (7.49b)) bis auf eine Phase gleich X_v (s.
 (7.52)) ist. Wegen $X_v X_{v'} = X_{v+v'}$, und aufgrund des Zwischenergebnisses
 sind $(U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, T)$ und $(U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, T')$ mit $a_n, a'_n, \neq 0$ und (j_n, v_n) bzw.
 (j'_n, v'_n) paarweise verschieden - genau dann äquivalent, wenn nach
 etwaiger Ummummerierung $N=N'$, $j_n = j'_n$, $a_n = a'_n$ und $v_n - v'_n$ konstant für alle
 n aus N .

Wir zeigen nun, daß (U_z, T_z) , $U_z := U_{(D), z} / \text{ISU}(2)$, für alle z irreduzi-
 bel ist. Sei P ein Projektor, der mit (U_z, T_z) vertauscht. Dann ver-
 tauscht auch der unitäre Operator $\beta := P - (1-P)$ damit. Also ist $\beta(X_n^{-1} f) =$
 $X_n^{-1} \beta f$, f aus $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, wobei β unitär ist und mit $U_{\text{ISU}(2)}$
 vertauscht, weshalb nach (7.42): $(\beta f)(s) = b(|s|) f(s)$ mit $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 meßbar, $b(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$. Nach dem Beweis von (6.8iii) vertauscht β^+ mit
 $\bigoplus_{j, j_n=j} X \mathcal{F}(D_{\text{ISU}(2)}^{(j_n)}, E^{\text{kan}}) \mathcal{F}^{-1} X^{-1}$ (vgl. (7.35), (7.50)). Da die Imprimi-
 tivitätssysteme $(D_{\text{ISU}(2)}^{(j_n)}, E^{\text{kan}})$ nach (7.35) und (6.9) paarweise inäqui-
 valent sind, läßt β^+ die Unterräume zu festem j invariant, so daß o.B.
 d.A. $j_n = j$ für alle n angenommen werden kann. Dann ist β^+ aus $U(\bigoplus_n$
 $L^2(\mathbb{R}^3, e^{2j+1}))$ mit $\beta^+((F_n)) = \sum_k C(e^{(k)}) F_k$, C aus $U(1^2)$, $e_n^{(k)} := \delta_{kn}$.
 Andererseits gilt: $\beta^+((\text{In}_m^j X_n^{-1} f)) = (\text{In}_m^j X_n^{-1} \beta f)$, f aus $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ (s.
 Beweis von (6.8iii)). Also ist $\sum_k c_n^k X_n X_{v_n - v_k} = B$, $c_n^k := (C(e^{(k)}))_n$, für
 alle n . Daher ist im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel
 $\sum_k c_n^k X_n b_{n,k}(|s|) f(s) = b(|s|) f(s)$, $b_{n,k} := \exp(i(v_n - v_k) \ln(|s|))$ (s.
 (7.52)). Wegen

$$(*) \quad \left| \sum_k c_n^k X_n b_{n,k}(r) \right| \leq \sum_k |c_n^k X_n| \leq 1, \quad r \text{ aus } \mathbb{R}_+,$$

nach der Ungleichung von Cauchy gilt obige Gleichheit aufgrund punkt-

weiser Konvergenz fast überall, so daß mit $f(s) := \exp(-|s|)$ folgt:

$$(**) \quad \sum_k c_n^k x_k b_{n,k}(r) = b(r) \text{ für fast alle } r \text{ aus } \mathbb{R}_+.$$

Die Partialsummen der linken Seite von (**) bilden eine Folge von beschränkten stetigen Funktionen, die nach (*) gleichmäßig konvergiert. Damit ist die Grenzfunktion stetig, weshalb b fast überall entweder gleich -1 oder 1 ist. Dies bedeutet entweder $P=0$ oder $P=1$, was zu zeigen war.

Aus dem Vorangegangenen folgt leicht, daß $(U_P^{(0,m)}, X_0^{-1} T^{(j,m)} X_0)$ für j aus $\mathbb{N}_0 + |m|$ eine reine Lokalisierung ist. Wir fassen zusammen.

Satz. Sei $T^{(v,j,m)} := X_0^{-1} X_v T^{(j,m)} X_v^{-1} X_0$, $T^{(j,m)} := \text{Pr}_m^j \mathcal{E}^{\text{kan}} \mathcal{E}^{-1}$. $X^{-1} \text{In}_m^j$, j aus $\mathbb{N}_0 + |m|$, $m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$, wobei E^{kan} das PV-Maß auf $\mathbb{R}^3$ in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})$, $E_M^{\text{kan}} f := 1_M f$, M aus $B(\mathbb{R}^3)$, und Pr_m^j , In_m^j wie in (4.1); vgl. ferner (7.36), (7.38), (7.52), (7.65). Ein bis auf Äquivalenz vollständiger Satz paarweise inäquivalenter reiner dilatationskovarianter Lokalisierungen eines masselosen Elementarsystems mit Helizität m ist

$$i) \quad (U_P^{(0,m)}, T^{(0,j,m)}), \quad j \text{ aus } \mathbb{N}_0 + |m|,$$

(s.(7.62b)). Jede dilatationskovariante Lokalisierung eines solchen Systems ist äquivalent zu einer abzählbaren konvexen (4.2) Linearkombination reiner dilatationskovarianter Lokalisierungen

$$ii) \quad (U_P^{(0,m)}, \sum_n a_n T^{(v_n, j_n, m)})$$

mit $a_n > 0$, $\sum_n a_n = 1$, (v_n, j_n) aus $\mathbb{R} \times (\mathbb{N}_0 + |m|)$ paarweise verschieden.

Alle Lokalisierungen aus ii) sind irreduzibel. Zwei Lokalisierungen aus ii) zu den Parameterfolgen (a_n, v_n, j_n) und (a'_n, v'_n, j'_n) sind genau dann äquivalent, wenn - nach etwaiger Umnummerierung - $(a_n) = (a'_n)$, $(j_n) = (j'_n)$ und $v_n - v'_n$ unabhängig von n ist. (Jede Fortsetzung des Kovarianzsystems $(\mathcal{U}_{\text{ISU}(2)}^{(0,m)}, \sum_n a_n T^{(v_n, j_n, m)})$ auf $\text{ISU}(2)$ ist äquivalent zu einem der paarweise

inäquivalenten und irreduziblen Kovarianzsysteme

(4.2)

$$(X_o^{-1} U_{IDSU(2)}^{(v,o,m)} X_o, \sum_n a_n T^{(v_n, j_n, m)}), v \text{ aus } \mathbb{R}.)$$

Aufgrund der in (4.2i)ff. ausgesprochenen Eigenschaft sind die reinen dilatationskovarianten Lokalisierungen eines masselosen Elementarsystems besonders ausgezeichnet. Bei der Bildung konvexer Linearkombinationen treten die mittels der Phasentransformationen X_v (s. (7.52)) äquivalent transformierten Lokalisierungen (4.2i) auf. Während eine gemeinsame 'Phase' jedoch äquivalente Lokalisierungen liefert, sind die Lokalisierungen aus (4.2ii) zu verschiedenen 'relativen Phasen' inäquivalent. Da Lokalisierungen nach WIGHTMAN [4] stets rein sind (s. (2.8)ff.), können diese nur in (4.2i) auftreten. Man erkennt sofort, daß (4.2i) im Fall $m=0$ für $j=0$ eine solche ist: Die Lokalisierungsoperatoren sind alle orthogonale Projektoren. Dies ist jedoch der einzige Fall. In allen anderen Fällen aus (4.2i), d.i. $m \neq 0$ und $j \neq 0$ oder $m \neq 0$, erhält man nämlich das Kovarianzsystem als Projektion eines irreduziblen Imprimitivitätssystems auf einen echten Unterraum. Unter den möglichen reinen dilatationskovarianten Lokalisierungen eines masselosen Elementarsystems der Helizität m sind die zu $j=|m|$ äquivalenten offensichtlich ausgezeichnet. Wir haben jedoch kein physikalisches Argument dafür. So sind z.B. alle Lokalisierungen aus (4.2i) unter Zeitumkehr invariant. In Kap.5 werden wir sogar feststellen, daß die einem Kovarianzsystem in natürlicher Weise zugeordneten Ortsoperatoren für jede Serie j aus $\mathbb{N}_0 + |m|$ aus (4.2i) identisch sind. Auch die folgenden Aussagen zur Struktur der Lokalisierungsoperatoren liefern für diese Frage lediglich ein Einfachheitsargument. Wir sind daher versucht, die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß sich masselose Elementarsysteme gegebener Helizität durch verschiedene Lokalisierbarkeitseigenschaften, wie sie durch die inäquivalenten Lokalisierungen (4.2ii) zum Ausdruck kommen, unterscheiden.

Wir betrachten das mittels X_o zu $(\rho_{P_{IDSU(2)}}^{(o,m)}, T^{(o,j,m)})$ äquivalente Kovarianzsystem $(U_{IDSU(2)}^{(m)}, T^{(j,m)})$ mit seiner Fortsetzung $(U_{IDSU(2)}^{(m)}, T^{(j,m)})$ auf $IDSU(2)$ (vgl. (4.1)). Für die Operatoren $T_M^{(j,m)} = P_{\mathbb{R}_m}^j X \mathcal{G} \cdot E_M^{\text{kan}} \mathcal{G}^{-1} X^{-1} I_{\mathbb{N}_m}^j$ in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, M aus $B(\mathbb{R}^3)$, j aus $\mathbb{N}_0 + |m|$, $m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ folgt nach kurzer Rechnung mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$(T_M^{(j,m)} f)(s) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{F} 1_M)(s-s') D_{mm}^{(j)}(B_s^{-1} B_{s'}) f(s') ds'$$

(4.3a) für f aus $L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ und M aus $B(\mathbb{R}^3)$ von endlichem Lebesguemaß, wobei

$$D_{mm}^{(j)}(B_s^{-1} B_{s'}) = (\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + e^{i(\phi' - \phi) \operatorname{sgn} m} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2})^{2|m|}$$

(4.3b) $p_{j-|m|}^{(0, 2|m|)}(\cos \chi(s, s'))$,

vgl. dabei (7.7ff.), (7.20), (7.23) und (7.22).

Ist M nicht von endlichem Lebesguemaß, so ist obige Integraldarstellung im Sinne der Distributionstheorie zu verstehen. Für den einfachsten Fall einer beschränkten Menge, den einer Kugel mit endlichem Radius, wollen wir die Struktur von $T_K^{(j,m)}$ näher untersuchen. Aufgrund der Kovarianz unter Translationen und Dilatationen genügt es, die Einheitskugel um den Ursprung zu betrachten.

Satz. Sei $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ in natürlicher Weise mit $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \otimes L^2(S^2, \mathbb{C})$ identifiziert (dabei ist - lax geschrieben - $4\pi r^2 dr$ das Maß auf $\mathbb{R}_+$ und dw das auf 1 normierte dreihinvariante Maß auf S^2). Dann gilt für den Lokalisierungsoperator für die Einheitskugel EK um den Ursprung:

$$i) \quad T_{EK}^{(j,m)} = \bigoplus_{j' \in \mathbb{N}_0 + |m|} K_{j'}^{(j,m)} \otimes p_m^{j'}$$

$$j \text{ aus } \mathbb{N}_0 + |m|, m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots,$$

(4.4) wobei $p_m^{j'}$ aus (7.34) und $K_{j'}^{(j,m)} = K_{j'}^{(j,-m)}$ ein stetiger positiver Operator in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, j' aus $\mathbb{N}_0 + |m|$, ist mit $\sup\{\|K_{j'}^{(j,m)}\|\}; j' \text{ aus } \mathbb{N}_0 + |m|\} = 1$; mit dem Hilbertraumisomorphismus $X^\wedge$ von $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ auf $L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $(X^\wedge R)(r) := (4\pi)^{1/2} r R(r)$, 1 das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}_+$, ist

$$ii) \quad K_{j'}^\wedge(j,m) := X^{\wedge -1} K_{j'}^{(j,m)} X^\wedge =$$

$$\sum_{1=|j-j'|}^{j+j'} (2l+1) \begin{pmatrix} 1 & j & j' \\ 0 & m & -m \end{pmatrix}^2 H_{l+1/2}^{\text{kan}} E_{l,1}^{\text{kan}} H_{l+1/2}^{-1},$$

wobei $\begin{pmatrix} 1 & j & j' \\ 0 & m & -m \end{pmatrix}$ das WIGNERSche 3-j-Symbol ist (s. [25; Kap. 3.71]),

H_V aus $U(L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))$, v aus $]-\frac{1}{2}, \infty[$,

$(H_V R)(r) := \int_{\mathbb{R}_+} J_V(rr')(rr')^{1/2} R(r') dr'$, die Hankeltransformation (s. [31; S. 240, 8.18]), mit J_V die Besselfunktion und

$E_{10,1}^{\text{kan}}$ die orthogonale Projektion in $L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $E_{10,1}^{\text{kan}} R := 1_{10,1} R$.

$K_{j'}^{(j,m)}$ ist also eine Linearkombination von orthogonalen Projektionen; diese lassen sich wie folgt weiter analysieren.

(4.4) Seien $P(2n+\frac{1}{2}+i)$ die orthogonale Projektion auf den von der auf 1 normierten Funktion $r \mapsto (4n+1+2i)^{1/2} r^{-1/2} J_{2n+1/2+i}(r)$ erzeugten eindimensionalen Unterraum von $L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, n aus $\mathbb{N}_0$, $i=0,1$, und $\mathcal{F}_c = H_{-1/2}$ die Fouriercosinus-, $\mathcal{F}_s = H_{1/2}$ die Fourier-sinustransformation. Dann ist

$$\text{iii) } \mathcal{F}_c E_{10,1}^{\text{kan}} \mathcal{F}_c^{-1} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} P(2n+\frac{1}{2}), \quad \mathcal{F}_s E_{10,1}^{\text{kan}} \mathcal{F}_s^{-1} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} P(2n+\frac{3}{2})$$

und

$$\text{iv) } H_{1+1/2} E_{10,1}^{\text{kan}} H_{1+1/2}^{-1} = \begin{cases} \mathcal{F}_c E_{10,1}^{\text{kan}} \mathcal{F}_c^{-1} - \bigoplus_{n=0}^{(1-1)/2} P(2n+\frac{1}{2}) & \text{für} \\ \mathcal{F}_s E_{10,1}^{\text{kan}} \mathcal{F}_s^{-1} - \bigoplus_{n=0}^{1/2-1} P(2n+\frac{3}{2}) & \text{für} \end{cases}$$

1 ungerade
1 gerade, 1 aus $\mathbb{N}$.

Beweis. Man rechnet leicht nach, daß $(\mathcal{F}_{1\text{EK}})(s-s') = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^1 \frac{\sin y |s-s'|}{|s-s'|} dy$. Nach dem Additionstheorem [26; 7.15(30), $\nu=1/2$] ist im Sinne der punktweisen Konvergenz

$$(*) \quad \frac{\sin y |s-s'|}{|s-s'|} = \frac{\pi}{2} \sum_{l \geq 0} (2l+1) (rr')^{-1/2} J_{l+1/2}(yr) J_{l+1/2}(yr') P_l(x),$$

$$r := |s|, \quad r' := |s'|, \quad x := \cos \angle(s, s'),$$

wobei $P_l = P_l^{(0,0)}$ das Legendre-Polynom vom Grad l bezeichnet. Im Hilbertraum $L^2([-1,1], \mathbb{C})$ bzgl. des Maßes $(1+x)^{2|m|} dx$ auf $[-1,1]$ bilden die Polynome $((2n+2|m|+1)/2^{2|m|+1})^{1/2} P_n^{(0,2|m|)}$, n aus $\mathbb{N}_0$, eine

ONB (vgl. [26; 10.81]). Damit gilt für h_r aus $L^2(\mathbb{R}_+ \times [-1, 1], \mathbb{C})$, $h_r(r', x) := (\mathcal{G}1_{EK})(s-s')P_{j-|m|}^{(0, 2|m|)}(x)$ (der L^2 -Raum wird bzgl. des Maßes $r'^2 dr' \cdot (1+x)^{2|m|} dx$ gebildet), im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel

$$h_r = \sum_{n \geq 0} ((2n+2|m|+1)/2^{2|m|+1})^{1/2} h_{r,n} \otimes P_n^{(0, 2|m|)},$$

wobei sich für $h_{r,n}(r') := \langle P_n^{(0, 2|m|)}, h_r(r', \cdot) \rangle$ nach zweimaliger Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz ergibt:

$$h_{r,n}(r') = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{l \geq 0} (2l+1)c_l (rr')^{-1/2} \int_0^1 y J_{l+1/2}(yr) J_{l+1/2}(yr') \cdot dy,$$

$$c_l := \int_{-1}^1 (1+u)^{2|m|} P_n^{(0, 2|m|)}(u) P_{j-|m|}^{(0, 2|m|)}(u) P_l(u) du, \quad l \text{ aus } \mathbb{N}_0,$$

im Sinne der punktweisen Konvergenz. Für eine Teilfolge der Partialsummen konvergiert die Entwicklung von h_r punktweise fast überall gegen h_r . Daher erhält man mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz und mit (7.7)ff. aus der Integraldarstellung (4.3)

$$(T_{EK}^{(j,m)} f)(r, w) = (2\pi)^{-3/2} \lim_k \sum_{j'=|m|}^{j'_k} \int_0^\infty \int_{S^2} \frac{2j'+1}{2^{2|m|+1}} h_{r, j'-|m|}(r') \cdot$$

$$D_{mm}^{(j')} (B_w^{-1} B_{w'}) f(r', w') r'^2 dr' dw'$$

für eine Teilfolge der Partialsummen. Aus (7.34) und der paarweisen Orthogonalität von $P_m^{j'}$ (s. (7.45)) folgt jedoch sofort, daß die rechte Seite für jede Teilfolge existiert und mit der linken Seite übereinstimmt. Damit ergibt sich die in i) behauptete Struktur von $T_{EK}^{(j,m)}$. Deshalb und da $T_{EK}^{(j,m)}$ positiv und stetig mit Norm 1 ist, ist $\sup \{ \|K_{j'}^{(j,m)}\| ; j' \text{ aus } \mathbb{N}_0 + |m| \} = 1$. Wir zeigen anschließend, daß $c_1 =$

$2^{2|m|+1} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^j \sum_{m=-m}^{j-m} \right)^2$, $l \text{ aus } \mathbb{N}_0$, insbesondere also $c_1 = 0$ für $|j-j'| > 1 >$

$j+j'$, womit ii) durch direktes Nachrechnen folgt. Zur Bestimmung von c_1 benutzen wir die Gleichheiten $\left(\frac{1}{2}(1+\cos \theta)\right)^{|m|} P_{j-|m|}^{(0, 2|m|)}(\cos \theta) = D_{m'm'}^{(j')}(B_s^{-1}) = D_{m'm'}^{(j')}(B_s) = D_{-m', -m'}^{(j')}(B_s)$, die aus dem Spezialfall $s'_1 = s'_2 = 0$, $s'_3 = 1$ von (4.3b) und (7.22) folgen. Damit und mit [18; (2.70c)I], (7.3) und (7.17) läßt sich obige Integraldarstellung von c_1 in der Form

schreiben

$$2^{-2|m|-1} c_1 = \int_{SU(2)} D_{mm}^{(j)}(B) D_{-m, -m}^{(j')}(B) D_{00}^{(1)}(B) dB,$$

wobei dB das auf 1 normierte Haarmaß auf SU(2) ist. Nach [25; (4.6.2)] sind dies genau die angegebenen WIGNERSchen 3-j-Symbole.

Die Funktionen $r \mapsto (4n+1+2i)^{1/2} r^{-1/2} J_{2n+1/2+1}(r)$ bilden nach [26; 7.14.2(32)] ein Orthonormalsystem von $L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Wir spezialisieren (*) auf den Fall $y=1$ und $x=1$ bzw. $x=-1$. Wegen $P_1(1)=1, P_1(-1)=(-1)^1$ erhält man daraus

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(r-r')}{r-r'} + \frac{\sin(r+r')}{r+r'} \right) = \sum_{l \geq 0} (4l+1) (rr')^{-1/2} J_{2l+1/2}(r) J_{2l+1/2}(r')$$

bzw.

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(r-r')}{r-r'} - \frac{\sin(r+r')}{r+r'} \right) = \sum_{l \geq 0} (4l+3) (rr')^{-1/2} J_{2l+3/2}(r) J_{2l+3/2}(r'),$$

was die Aussage iii) ist, ausgedrückt durch die zugehörigen Integralkerne.

Zum Beweis von iv) leiten wir zunächst die folgende Formel ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sum_{n=k}^{k'} 2(v+2n) (ab)^{-1} J_{v+2n}(az) J_{v+2n}(bz) = \\ (**) \quad z(J_{v+2k-1}(az) J_{v+2k-1}(bz) - J_{v+2k'+1}(az) J_{v+2k'+1}(bz)) \end{aligned}$$

für alle z, a, b, v aus $\mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, k, k' aus $\mathbb{Z}$, $k \leq k'$. Wir benützen dazu die Beziehung

$$\begin{aligned} (***) \quad 2v(z_1 J_v'(z_1) J_v(z_2) + z_2 J_v(z_1) J_v'(z_2)) = \\ z_1 z_2 (J_{v-1}(z_1) J_{v-1}(z_2) - J_{v+1}(z_1) J_{v+1}(z_2)), \end{aligned}$$

z_1, z_2, v aus $\mathbb{C}$, die sich aus [26; 7.2.8(54), (55), (56)] folgendermaßen ergibt: $2v(z_1 J_v'(z_1) J_v(z_2) + z_2 J_v(z_1) J_v'(z_2)) = 2v((z_1 J_{v-1}(z_1) - v J_v(z_1)) \cdot J_v(z_2) + J_v(z_1) \cdot (-z_2 J_{v+1}(z_2) + v J_v(z_2))) = 2v(z_1 J_{v-1}(z_1) J_v(z_2) - z_2 J_v(z_1) \cdot J_{v+1}(z_2)) = z_1 z_2 (J_{v-1}(z_1) (J_{v-1}(z_2) + J_{v+1}(z_2)) - (J_{v-1}(z_1) + J_{v+1}(z_1)) J_{v+1}(z_2)) = z_1 z_2 (J_{v-1}(z_1) J_{v-1}(z_2) - J_{v+1}(z_1) J_{v+1}(z_2))$. Man rechnet nun die linke Seite von (**) nach der Produktregel der Differentiation aus und wendet (***) an.

Wir integrieren (**) für den Spezialfall $k=0$, $k'=(1-1)/2$ und $v=1/2$

für l ungerade, $k'=1/2-1$ und $v=3/2$ für l gerade, sowie $a=r$, $b=r'$, bzgl. der reellen Variablen $z=y$ zwischen 0 und 1 und erhalten unter Berücksichtigung von $J_v(0)=0$, v aus $\mathbb{R}_+$ (vgl. [26; 7.2.1(2)]) die Aussage iv) ausgedrückt durch die zugehörigen Integralkerne. ■

Bis auf die explizite Form der $K_{j'}^{(j,m)}$, j' aus $\mathbb{N}_0 + |m|$, ist die in (4.4i) angegebene Struktur von $T_{EK}^{(j,m)}$ eine direkte Folge aus der Invarianz dieses Operators unter Drehungen.

Für den Fall $j=|m|$ lassen sich die in (4.4ii) auftretenden WIGNERschen $3-j$ -Symbole sogar direkt angeben. Nach [25; (3.7.5), (3.7.6), (3.7.10)] ist

$$\begin{pmatrix} 1 & |m| & j' \\ 0 & m & -m \end{pmatrix}^2 = \frac{(2|m|)! (-|m|+j'+1)! (|m|+j')!}{(|m|+j'+1+1)! (|m|-j'+1)! (|m|+j'-1)! (-|m|+j')!}.$$

Damit und mit (4.4iv) ergibt sich für

$$m=0: \quad K_{j'}^{(0,0)} = H_{j'+1/2} E_{j',1}^{\text{kan}} H_{j'+1/2}^{-1}, \quad j' \text{ aus } \mathbb{N}_0;$$

das Neutrino bzw. Antineutrino ($m=1/2$ bzw. $-1/2$):

$$(4.5a) \quad K_{j'}^{(1/2, \pm 1/2)} = K - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{j'-1/2} P(n+1/2), \quad j' \text{ aus } \mathbb{N}_0 + \frac{1}{2};$$

das Photon ($m= \pm 1$):

$$(4.5b) \quad K_{j'}^{(1, \pm 1)} = K - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{j'-1} P(n+1/2) - \frac{1}{2} \frac{j'}{2j'+1} P(j'+1/2), \quad j' \text{ aus } \mathbb{N};$$

das Graviton ($m= \pm 2$):

$$(4.5c) \quad K_{j'}^{(2, \pm 2)} = K - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{j'-2} P(n+1/2) - \frac{j'-1}{4j'+2} \left(\frac{7j'+4}{4j'-2} P(j'-1/2) + P(j'+1/2) + \frac{j'}{4j'+6} P(j'+3/2) \right); \quad j' \text{ aus } \mathbb{N}+1.$$

$K_{j'}^{(0,0)}$, j' aus $\mathbb{N}_0$, ist natürlich ein Projektionsoperator, denn $T_{(0,0)}$ ist ein PV-Maß (vgl. (4.2)ff.). In (4.5) ist $K: L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \rightarrow L_1^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ mit $(KR)(r) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(r-r')}{r-r'} R(r') dr'$ ein Integraloperator

vom WIENER-HOPF-Typ. Er tritt hier als $K = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_{c|0,1|}^{\text{kan}} \mathcal{F}_c^{-1} + \mathcal{F}_{s|0,1|}^{\text{kan}} \mathcal{F}_s^{-1})$ auf. K ist positiv und stetig mit Norm 1. Mit [32;S.142, Th.6.17.1] zeigt man, daß K ein rein absolut stetiges Spektrum hat, weshalb die Operatoren aus (4.5), die ja aus K durch eine endlichdimensionale Störung hervorgehen, nach [32;S.101, Cor. zu Th.5.4.1 und S.94, Cor. zu Th.5.1.1] zu K unitär äquivalent sind und daher insbesondere das gleiche Spektrum wie K besitzen. Es ist zu vermuten, daß das Spektrum von K genau das Intervall $[0,1]$ ist und die Multiplizität in allen Punkten des Spektrums gleich 1 ist. Ersteres ist gerade von der physikalischen Seite her unmittelbar einsichtig; denn ein "Loch" im Spektrum bedeutet eine sprunghafte Änderung des Lokalisierungsgrades, was dem Bild von der inneren Strukturlosigkeit des betrachteten physikalischen Systems widerspricht.

4.2.2 Dilatationskovariante Lokalisierungen des zweikomponentigen Photons. Ein Photon scharfer Helizität ist ein elementares System im Sinne von WIGNER. Der Zustand eines Photons ist jedoch in der Regel eine Superposition aus Zuständen beider Helizitäten, wie dies z.B. bei linearpolarisiertem Licht der Fall ist. Ein physikalisches Photon wird daher durch die direkte Summe der Photondarstellungen zu den Helizitäten $+1$ und -1 repräsentiert. Dementsprechend lassen sich Lokalisierungen davon als direkte Summe von Lokalisierungen einkomponentiger Photonen verschiedener Helizität konstruieren. Wie wir sehen werden (s.(4.6)), gibt es auch irreduzible Lokalisierungen des physikalischen Photons. Mit Hilfe des in Kap.4.1 beschriebenen Konstruktionsverfahrens lassen sich bis auf Äquivalenz alle Lokalisierungen des physikalischen Photons bestimmen. Dies ist jedoch aufwendiger als im Fall des einkomponentigen Photons und liefert nichts prinzipiell Neues. Wir beschränken uns daher auf die Angabe von zwei Serien paarweise inäquivalenter reiner dilatationskovarianter Lokalisierungen, die sich besonders einfach konstruieren lassen.

$$(4.6a) \quad (U_{\mathbb{P}}^{(0,-1)} \oplus U_{\mathbb{P}}^{(0,+1)}, T^{(0,j,-1)} \oplus T^{(0,j,+,+1)}), \\ j_-, j_+ \text{ aus } \mathbb{N} \text{ (vgl.(4.2))},$$

$$(4.6b) \quad (U_{\mathbb{P}}^{(0,-1)} \oplus U_{\mathbb{P}}^{(0,+1)}, T^{(0,j,-1,+1)}), \quad j \text{ aus } \mathbb{N}, \\ \text{wobei } T^{(0,j,-1,+1)} := X_0^{-1} \text{Pr}_{-1,+1}^j X \mathcal{F}^{\text{kan}} \mathcal{F}^{-1} X^{-1} \text{In}_{-1,+1}^j X_0$$

mit X_o aus (7.63) für $j=\frac{1}{2}$, $\text{Pr}_{-1,+1}^j: L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}) \longrightarrow$

$$(4.6b) \quad L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2), \text{Pr}_{-1,+1}^j f := \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_{+1} \end{pmatrix}, \text{In}_{-1,+1}^j \text{ die Adjungierte zu } \text{Pr}_{-1,+1}^j \quad (= \text{kanonische Einbettung}).$$

Die Lokalisierungen aus (4.6a) sind reduzibel, die aus (4.6b) irreduzibel. Im Fall $j=1$ aus (4.6b) erhalten wir in ${}^1T^{(0,1,-1,+1)}$ (vgl. (2.4)) genau die schwache Lokalisierung des physikalischen Photons, die von AMREIN [7] eingehend untersucht wird. Insbesondere ergibt sich aus [7; Th.2], daß es für die Lokalisierung (4.6b) im Fall $j=1$ zu jedem Raumgebiet mit nichtleerem Inneren strikt lokalisierte Zustände des physikalischen Photons gibt. Wir erinnern, daß dies für keine Lokalisierung des einkomponentigen Photons zutrifft (vgl. (2.5)ff.) und somit auch für keine der Lokalisierungen aus (4.6a). Das hat aber zur Folge, daß ein gemäß (4.6b) in einem beschränkten Raumgebiet strikt lokalisiertes Photon nicht zirkularpolarisiert sein kann.

4.2.3 Dilatationskovariante Lokalisierungen massiver Elementarsysteme.

Anstelle der linken Seite des Schemas (4.1) tritt hier die folgende Kette:

$$(4.7) \quad U_P^{(\mu,j)} \xrightarrow{(1)} \tilde{U}_{\text{ISU}(2)}^{(\mu,j)} \xrightarrow{(2)} \bigoplus_{m=-j}^j U_{\text{ISU}(2)}^{(m)} \xrightarrow{(3)} \bigoplus_{m=-j}^j U_{\text{IDSU}(2)}^{(v_m, 0, m)}$$

wobei (1) die Einschränkung der Darstellung (7.62a) auf $\text{ISU}(2)$, (2) die Äquivalenztransformation (7.64) und (3) die Fortsetzungen auf $\text{IDSU}(2)$ (vgl. (7.49a), (7.49b), (7.52)) sind, die zueinander äquivalent sind. Die Bestimmung eines vollständigen Satzes dilatationskovarianter Lokalisierungen massiver Elementarsysteme mit Hilfe der Konstruktionsmethode aus Kap.4.1 ist zwar möglich, aber aufgrund der Reduzibilität der nach Schritt (3) erhaltenen $\text{IDSU}(2)$ -Darstellung weitaus aufwendiger als im Fall masseloser Elementarsysteme. Es genügt jedoch, zwei besonders wichtige Extremfälle reiner dilatationskovarianter Lokalisierungen zu betrachten.

Eine dilatationskovariante Lokalisierung lautet:

$$(4.8) \quad (U_P^{(\mu,j)}, T^{(\mu,j,hv)}), T^{(\mu,j,hv)} := \bigoplus_{m=-j}^j X_\mu^{-1} T^{(j,m)} X_\mu, \\ j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, \text{ vgl. (3.1), (7.63), } hv = \text{helizitätsverträglich.}$$

Sie entspricht einer vollständigen Entkopplung von Helizität und Lokalisierung: Messungen zur Spineinstellung in Impulsrichtung sind mit allen Ortsmessungen verträglich. Man sieht mit Hilfe von (2.5)ff. leicht ein, daß helizitätsverträgliche Lokalisierungen keine in beschränkten Raumgebieten strikt lokalisierte Zustände zulassen. Alle Fortsetzungen auf $\text{IDSU}(2)$ des zu (4.8) gehörenden euklidischen Kovarianzsystems ergeben sich bis auf Äquivalenz aus (4.2) und (4.7). Für den anderen Extremfall, der einer vollständigen Kopplung von Helizität und Lokalisierung entspricht, wählen wir in (4.7): $v_m = v$ aus $\mathbb{R}$, $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$. Aus der rechten Seite des Schemas (4.1) ist zu ersehen, daß sich in diesem Fall die $\text{IDSU}(2)$ -Darstellung aus (4.7) direkt zu dem irreduziblen Imprimitivitätssystem

$$(4.9) \quad (X \mathcal{F} D_{\text{IDSU}(2)}^{(v,j)} \mathcal{F}^{-1} X^{-1}, X \mathcal{F} E^{\text{kan}} \mathcal{F}^{-1} X)$$

(vgl. (7.36), (7.38), (7.50)) ergänzen läßt. Diese Imprimitivitätssysteme sind für verschiedene (v, j) inäquivalent, und jede Fortsetzung auf $\text{IDSU}(2)$ des Imprimitivitätssystems

$$(4.10) \quad (\tilde{P}_{\text{IDSU}(2)}^{U(\mu,j)}, E^{(\mu,j)}), E^{(\mu,j)} := X_\mu^{-1} X \mathcal{F} E^{\text{kan}} \mathcal{F}^{-1} X^{-1} X_\mu),$$

$\mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

(vgl. (7.63), (7.64)) - bis auf Äquivalenz das einzige zu der Darstellung $\tilde{P}_{\text{ISU}(2)}^{U(\mu,j)}$ - ist äquivalent zu einem Imprimitivitätssystem aus (4.9) zum gleichen j . Die Lokalisierung

$$(4.11) \quad (U_{\tilde{P}}^{(\mu,j)}, E^{(\mu,j)}), \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (\text{vgl. (4.10)}),$$

massiver Elementarsysteme ist genau die von WIGHTMAN [41]. Man erkennt den engen Zusammenhang mit den Lokalisierungen (4.2i) masseloser Elementarsysteme, die i.w. eine Projektion von (4.11) sind. Das gleiche gilt auch für die Lokalisierungen (4.6b) des physikalischen Photons.

5 Lokalisierung und Ortsoperator

Für den Großteil der Literatur, die sich mit dem Problem der Lokalisierbarkeit beschäftigt, ist die Lokalisierbarkeit eines physikalischen Systems gleichwertig mit der Existenz eines Ortsoperators (vgl. [1; Kap. 3]). Es ist dies ein Operator, der gewisse, ihn festlegende Eigenschaften besitzt. Hinsichtlich dieser Eigenschaften besteht aber in der Literatur keine Übereinstimmung: Sie werden z.B. korrespondenzmäßig aus der klassischen Physik abgeleitet oder betreffen das Relativitätsprinzip oder beziehen sich auf die Kompatibilität der Ortsmessungen. Für uns stellt sich die Frage nach den definierenden Eigenschaften eines Ortsoperators nicht. Denn da wir von einer gegebenen Lokalisierung des physikalischen Systems ausgehen, ist es - in nahe-
liegender Verallgemeinerung des nichtrelativistischen Falls - klar, welche daraus ableitbare Größe als Ortsoperator anzusehen ist. Ihre physikalische Bedeutung ergibt sich unmittelbar aus der der Lokalisierungsoperatoren. Dieser allgemeine Zusammenhang von Lokalisierung und Ortsoperator wird in 5.1 behandelt. In 5.2 berechnen wir dann explizit die Ortsoperatoren, die sich aus den in 4.2 angegebenen reinen Lokalisierungen ableiten. Dabei erhält man z.T. bereits bekannte Operatoren, die in der eingangs erwähnten Literatur betrachtet worden sind. Schließlich drücken wir in Kap. 5.3 diese Ortsoperatoren noch durch die Erzeugendenelemente der Liealgebra der Poincarégruppe aus, um weiteren Einblick in ihre Struktur zu erhalten.

5.1 Allgemeiner Zusammenhang von Lokalisierung und Ortsoperator. In der nichtrelativistischen Quantenmechanik ist die Definition eines Ortsoperators unproblematisch. Aufgrund der aus der Schrödingergleichung ableitbaren Kontinuitätsgleichung liegt es nahe, für einen Zustand des Systems, der im Ortsraum durch eine Wellenfunktion g aus $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})$ repräsentiert wird, $x \mapsto \sum_{m=-j}^j |g_m(x)|^2 := w_g(x)$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte und $\int 1_M(x) w_g(x) dx$ als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Systems im Raumgebiet M zu interpretieren. Damit ist

$$\left(\int x_k w_g(x) dx \right)_{1 \leq k \leq 3}$$

der Erwartungswert der Ortsobservablen; der selbstadjungierte Operator

$$(5.1) \quad \begin{aligned} Q_k, D(Q_k) &:= \{ g \text{ aus } L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}) : \int x_k^2 w_g(x) dx < \infty \} , \\ (Q_k g)(x) &:= x_k g(x), \end{aligned}$$

ist als k-te Komponente des Ortsoperators $\underline{Q}$ zu deuten, $k=1,2,3$. Dieser Ortsoperator hat die folgenden Eigenschaften:

$$(5.2a) \quad [Q_k, P_1] = i\delta_{k1}, \quad P_k \text{ Impulsoperator,}$$

$$(5.2b) \quad [Q_k, L_1] = i \sum_m \varepsilon_{klm} Q_m, \quad L_1 \text{ Drehimpulsoperator,}$$

$$(5.2c) \quad [Q_k, Q_1] = 0,$$

für $1 \leq k, l, m \leq 3$. a) und b) drücken die Tatsache aus, daß die durch das Tripel $\underline{Q} = (Q_k)$ selbstadjungierter Operatoren dargestellte Observable ein Dreiervektor im Ortsraum ist. Aus c) folgt die Verträglichkeit aller Ortsmessungen untereinander.

Diese Interpretation von (5.2) ist unmittelbar einsichtig, wenn man die gemeinsame Spektralverteilung $E_k^{\text{kan}}, E_M^{\text{kan}} g := 1_M g$ mit M aus $B(\mathbb{R}^3)$, g aus $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})$, der Operatoren Q_1, Q_2 und Q_3 betrachtet; wir nennen E_k^{kan} eine gemeinsame Verteilung der Q_k , weil für die PV-Maße E_k^{kan} auf $\mathbb{R}$, $E_{1,M}^{\text{kan}} := E_{M \times \mathbb{R}}^{\text{kan}}$ mit M aus $B(\mathbb{R})$, E_2 und E_3 entsprechend, offensichtlich gilt:

$$(5.3) \quad Q_k = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} dE_k^{\text{kan}}, \quad k=1,2,3.$$

E_k^{kan} ist ein PV-Maß auf $\mathbb{R}^3$ (s.(6.1)), das kovariant ist unter der euklidischen Gruppe in bezug auf die Darstellung $D_{\text{ISU}(2)}^{(j)}$ (s.(7.35)), m.a.W. $(D_{\text{ISU}(2)}^{(j)}, E_k^{\text{kan}})$ ist ein kanonisches Imprimitivitätssystem zu $(\text{ISU}(2), \mathbb{R}^3)$ (s.(6.9)). Nun ist die Symmetriegruppe der nichtrelativistischen Theorie die inhomogene Galileigruppe IGAL und

$$\begin{aligned} U_{\text{IGAL}}^{(\mu, j)}: \widetilde{\text{IGAL}} &\longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})), \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \\ (U(t, b, B, u)f)(s) &:= e^{i(-bs+t|s|^2/2\mu)} D^{(j)}(B)f(B^{-1}(s-\mu u)), \end{aligned}$$

ein bis auf unitäre-antiunitäre Strahläquivalenz vollständiger Satz irreduzibler unitärer Multiplikatorordarstellungen zur Masse $\mu > 0$ ihre universellen Überlagerungsgruppe $\widetilde{\text{IGAL}}$ (s.[23; (9-3)1]). Nach (7.37) gilt:

$$U_{\text{IGAL}}^{(\mu, j)} / \text{ISU}(2) = \mathcal{F}^{D(j)}_{\text{ISU}(2)} \mathcal{F}^{-1}, \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Somit ist $(\mathcal{F}^{-1} U_{\text{IGAL}}^{(\mu, j)} \mathcal{F}, E^{\text{kan}})$ eine Lokalisierung nach WIGHTMAN [4] eines nichtrelativistischen Elementarsystems mit Masse μ und Spin j . Die Eigenschaft (5.2c) der Ortsoperatoren ist also eine Folge der Kommutativität (2.3b) der Lokalisierungsoperatoren und (5.2a) bzw. (5.2b) folgt aus der Kovarianz des PV-Maßes unter Translationen bzw. Drehungen.

Für das folgende schreiben wir (5.2a bzw. b) in der Form

$$(5.4a) \quad U(a) Q_k U(a)^{-1} = Q_k - a_k 1, a \text{ aus } \mathbb{R}^3,$$

$$(5.4b) \quad U(B) Q_k U(B)^{-1} = \sum_{l=1}^3 \wedge^{\bullet}(B)_{kl}^{-1} Q_l, B \text{ aus } \text{SU}(2) \text{ (s. (7.1))},$$

$k=1,2,3$, mit $U = D_{\text{ISU}(2)}^{(j)}$ (s. (7.35)), die mit Hilfe des Funktionenkal-
küls aus der Kovarianz von E^{kan} bzgl. U folgt.

Die vorangegangenen Überlegungen legen es nahe, von dem übergeordneten Begriff der Lokalisierung auszugehen und den Begriff des Ortsoperators daraus abzuleiten. In der relativistischen Theorie hat man jedoch - wie in Kap. 4 gezeigt - i. allg. Kovarianzsysteme zu betrachten, die keine Imprimitivitätssysteme sind. In einer direkten und natürlichen Verallgemeinerung von (5.3) definieren wir den zu einer Lokalisierung $(U_{\mathcal{F}}, T)$ eines relativistischen Systems gehörigen Ortsoperator Q - zunächst rein formal - weiterhin durch (5.3), wobei jetzt jedoch nicht bzgl. des PV-Maßes E^{kan} sondern bzgl. des POV-Maßes T integriert wird. Es bleibt zu klären, ob und wie das mathematisch präzisiert werden kann.

Für die folgende Zwischenbetrachtung sei T ein beliebiges POV-Maß auf $\mathbb{R}$ in einem Hilbertraum H_T . Für jedes f aus H_T ist $m_f^T, m_f^T(M) := \langle f, T_M f \rangle, M \text{ aus } \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten den Untervektorraum

$$(5.5) \quad V_T := \{ f \text{ aus } H_T : \text{id}_{\mathbb{R}} \text{ quadratintegrierbar bzgl. } m_f^T \}$$

von H_T und setzen für f aus V_T

$$(5.6) \quad \langle f, f \rangle_T := \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} dm_f^T.$$

Bekanntlich ist für den Spezialfall eines PV-Maßes E (anstelle von T)

der Teilraum V_E dicht in H_E , und $\langle f, Q_E f \rangle = \langle f, f \rangle_E$ bestimmt eindeutig einen selbstadjungierten Operator $Q_E = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} dE$ mit V_E als Definitionsbereich. Diese Aussagen gelten jedoch im Fall eines POV-Maßes P i.allg. nicht. So kann, wie man sich an einem eindimensionalen Beispiel klarmacht, im Extremfall $\text{id}_{\mathbb{R}}$ nur bzgl. $m_0^T = 0$ integrierbar und insbesondere $V_T = \{0\}$ sein. Ohne tiefergehende Überlegungen läßt sich unter der Annahme der Dichtheit von V_T jedoch die folgende Mindestaussage machen.

Satz. Seien T ein POV-Maß auf $\mathbb{R}$ in H_T , (H_E, E) die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte minimale Erweiterung von (H_T, T) (s. (6.3)) und P die orthogonale Projektion in H_E auf H_T . Dann gilt:

- i) $V_T = V_E \cap H_T$ (vgl.(5.5))
- (5.7) ii) Ist V_T' ein Untervektorraum von V_T , der dicht in H_T liegt, so ist durch $\langle f, f \rangle_T = \langle f, Q_T' f \rangle$ (vgl.(5.6)) ein symmetrischer Operator Q_T' in H_T mit Definitionsbereich V_T' eindeutig bestimmt; es ist $Q_T' = PQ_E/V_T'$, $Q_E = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} dE$ (vgl.(5.6)ff.).

Beweis. i) ist klar. Für $Q_T' := PQ_E/V_T'$, was wegen i) wohldefiniert ist, gilt klarerweise $\langle f, f \rangle_T = \langle f, Q_T' f \rangle$. Aus der Dichtheit von V_T' folgt die Eindeutigkeitsaussage: Denn ein in einem komplexen Hilbertraum dicht definierter Operator, dessen Diagonalelemente verschwinden, ist bekanntlich der Nulloperator. Daß Q_T' symmetrisch ist, folgt sofort aus der in ii) angegebenen Form. ■

Wir bezeichnen den Abschluß von Q_T' mit Q_T . Für die in Kap.5.2 betrachteten Lokalisierungen (U_P^∞, T) werden wir die Definitionsbereiche $V_k' := V_{T_k}'$, T_k POV-Maß auf $\mathbb{R}$, $k=1,2,3$, mit $T_{1,M}' := T_M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, M aus $B(\mathbb{R})$, T_2 und T_3 entsprechend, so wählen, daß die Komponenten $Q_k := Q_{T_k}$ (vgl.(5.7)) des zugehörigen Ortsoperators selbstadjungiert sind (vgl. jedoch die folgende Diskussion).

Aufgrund der Kovarianzeigenschaft des POV-Maßes T folgen für den Ortsoperator unmittelbar die Eigenschaften (5.4a) und (5.4b) bzgl. $U = U_P^\infty/\text{ISU}(2)$. Diese Eigenschaften allein qualifizieren die Operatoren Q_k als die Komponenten eines Ortsoperators (im Fall des zweikomponentigen Photons sind die Operatoren Q_k dadurch bereits weitgehend festge-

legt (vgl. [131])). Die physikalische Interpretation dieser Größen ergibt sich jedoch direkt aus der der Lokalisierungsoperatoren: Gemäß der Modellvorstellung aus Kap.2 ist z.B. $m_f^{T_1}(M) = \langle f, T_M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} f \rangle$ der Erwartungswert des Lokalisierungsgrads des Systems im normierten Zustand f in der Zylindermenge $M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, M aus $B(\mathbb{R})$, so daß bei der Integration von $\text{id}_{\mathbb{R}}$ bzgl. des Maßes $m_f^{T_1}$ jene Koordinatenwerte stark gewichtet werden, die in Gebieten hoher Substanzkonzentration liegen. Für einen Zustand f , für den die zugehörige Konzentrationsverteilung ein einziges ausgeprägtes Maximum hat, stimmt $\langle f, Q_1 f \rangle$ gut mit der ersten Koordinate des Ortes des Konzentrationsmaximums überein.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Feststellung, daß für Q_k i.allg. nicht - wie sonst bei quantenmechanischen Observablen - das zugehörige Spektralmaß sondern eben das POV-Maß T_k die physikalische Interpretation liefert. Es wäre deshalb mit den allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik auch vereinbar, wenn man auf die Selbstadjungiertheit von Q_k verzichtete und statt dessen durch die Wahl $V'_k = V_{T_k}$ (vgl. (5.7ff.)) die Gültigkeit von $\langle f, f \rangle_{T_k} = \langle f, Q_k f \rangle$ (vgl. (5.6), (5.7ii)) für einen möglichst großen Definitionsbereich erreichte. Auf jeden Fall erfordert das Konzept des Ortsoperators immer dort einige Vorsicht, wo keine PV-Lokalisierung vorliegt; d.i. insbesondere für alle masselosen Elementarsysteme mit von Null verschiedener Helizität der Fall.

Ist das betrachtete POV-Maß T zusätzlich dilatationskovariant (s. (2.7)) - was in allen von uns explizit untersuchten Fällen (s. Kap.4.2) vorliegt - so gilt für die Ortsoperatoren

$$(5.8) \quad U(r)Q_k U(r)^{-1} = \frac{1}{r} Q_k, \quad r \text{ aus } \mathbb{R}_+, \quad \text{mit } U = U_{\text{DSU}(2)} \quad (\text{vgl. (2.7)}).$$

Wir nennen solche Ortsoperatoren dilatationskovariant.

5.2 Die Ortsoperatoren zu den reinen Lokalisierungen aus Kap.4.2. Wir berechnen die Ortsoperatoren für die in 4.2 angegebenen reinen Lokalisierungen mit Hilfe von (5.7). Die in diesem Zusammenhang notwendigen Überlegungen über die Definitionsbereiche der Ortsoperatoren werden wir an einem Fall (s. Kap.5.2.1) explizit durchführen. In den anderen Fällen verlaufen sie ganz analog. Auch genügt es, lediglich eine Komponente - etwa die 3-Komponente des Ortsoperators zu bestimmen. Die beiden übrigen ergeben sich aus (5.4b), denn es ist (s. (7.4))

$$(5.9) \quad U(D_3)Q_3 U(D_3)^{-1} = Q_1, \quad U(D_3)^{-1}Q_3 U(D_3) = Q_2.$$

5.2.1 Dilatationskovariante Ortsoperatoren masseloser Elementarsysteme

Nach (5.3) ist E^{kan} die gemeinsame Verteilung der Multiplikationsoperatoren (5.1), deren Fouriertransformierten die mit i multiplizierten partiellen Ableitungsoperatoren sind. Ausgehend von (4.2) sind daher bis auf Äquivalenz alle dilatationskovarianten Ortsoperatoren zu reinen Lokalisierungen eines masselosen Elementarsystems mit Helizität $m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$, wegen (5.7) durch

$$(5.10) \quad Q^{(0,m)} := X_0^{-1} Q^{(m)} X_0$$

gegeben, wobei $Q_k^{(m)}$ der Abschluß ist des Operators

$$(5.11) \quad Q_k^{(m)} := \Pr_m^j X_i \partial_k X^{-1} \text{In}_m^j / V_k', \quad j \text{ aus } \mathbb{N}_0 + |m|, \text{ mit}$$

V_3' die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{C}$ mit einem in $\{s \text{ aus } \mathbb{R}^3 : s_1, s_2 \neq 0\}$ liegenden kompakten Träger, V_1' bzw. V_2' entsprechend gemäß (5.9).

Wir werden in (5.13)ff. sehen, daß - obwohl die Lokalisierungen $(U_P^{(0,m)}, T^{(0,j,m)})$ in j paarweise inäquivalent sind - die zugehörigen Ortsoperatoren für alle j aus $\mathbb{N}_0 + |m|$ übereinstimmen. Es ist dies ein wichtiges Beispiel dafür, daß zwar der Ortsoperator durch die Lokalisierung eindeutig bestimmt ist, die Lokalisierung jedoch i.allg. nicht einmal bis auf Äquivalenz aus dem Ortsoperator rekonstruiert werden kann. (Die gleiche Information beinhalten Lokalisierung und Ortsoperator allerdings bei Lokalisierungen mit einem PV-Maß. Denn ein Ortsoperator hat höchstens eine PV-Verteilung. Letzteres ist eine einfache Folge aus dem Spektralsatz selbstadjungierter Operatoren und aus der Durchschnittseigenschaft (2.3b).) Physikalisch bedeutet diesen Sachverhalt, daß der Ortsoperator i.allg. nicht die ganze Information über die Substanzverteilung des Systems im Raum enthält.

Wir diskutieren nun (5.11). V_3' liegt offenbar dicht in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Da

$$B_s = \begin{pmatrix} a_+ & -b^+ a_- \\ b a_- & a_+ \end{pmatrix}, \quad a_{\pm} := \left(\frac{1}{2} (1 \pm s_3 / |s|) \right)^{1/2}, \quad b := (s_1 + i s_2) / |s_1 + i s_2|,$$

wie man leicht mit Hilfe von (7.7ff.) nachrechnet, ist nach (7.13)

$$(X^{-1} \text{In}_m^{j,f})_m, \text{ aus } V_3', \quad m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j, \quad f \text{ aus } V_3', \text{ so daß } V_3' \subset V_{T_3}^{(m)},$$

(vgl. (5.5)), weshalb (5.7ii) anwendbar ist. Damit ist $Q_3^{(m)}$, symmetrisch. Eine kurze Rechnung ergibt: $(Q_3^{(m)}, f)(s) = i(\partial_3 f)(s) + f(s) \cdot (D^{(j)}(B_s^{-1}) i \partial_3 D^{(j)}(B_s))_{mm}$, f aus V_3^1 . Da $\partial_3 = \cos \theta \partial_{|s|} - |s|^{-1} \sin \theta \partial_\theta$, ist nach (7.7ff.) zusammen mit (7.17):

$$i \partial_3 D^{(j)}(B_s) = |s|^{-1} \sin \theta D^{(j)}(B_\phi) (me^{im\theta} \delta_{mm},) D^{(j)}(B_\phi^{-1}), \quad \text{weshalb}$$

$$D^{(j)}(B_s^{-1}) i \partial_3 D^{(j)}(B_s) = |s|^{-1} \sin \theta D^{(j)}(B_\phi) \text{He}^{(j)} D^{(j)}(B_\phi^{-1}), \quad \text{wobei}$$

$$(5.12) \quad \text{He}^{(j)} := \begin{pmatrix} -j & & 0 \\ & -j+1 & \\ 0 & & j-1 \\ & & & j \end{pmatrix} = \frac{1}{2} d^j \zeta_3 \quad (\text{vgl. (7.2), (7.19a)}),$$

die Helizitätsmatrix bezeichnet. Mit (7.19c) ergibt sich somit

$$(5.13) \quad D^{(j)}(B_s^{-1}) i \partial_3 D^{(j)}(B_s) = \frac{1}{2|s|} d^j (s_2 \zeta_1 - s_1 \zeta_2).$$

Daraus ersieht man mit (7.19a) sofort, daß im letzten Ausdruck für $Q_3^{(m)}$, der zweite Summand verschwindet und damit die Abhängigkeit von j wegfällt: $Q_3^{(m)} = i \partial_3 / V_3^1$. Wir zeigen, daß $(Q_3^{(m)}, \pm i) V_3^1$ dicht sind in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$, woraus bekanntlich die wesentliche Selbstadjungiertheit von $Q_3^{(m)}$ folgt. Seien f_1, f_2, f_3 beliebig oft differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ mit kompaktem Träger, f_1 und f_2 überdies derart, daß ihr Träger den Nullpunkt nicht enthält. Dann ist $f = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3$ aus V_3^1 und $(Q_3^{(m)}, \pm i)f = f_1 \otimes f_2 \otimes (id \pm i)f_3$ mit d die gewöhnliche Ableitung. Die Funktionen vom Typ f_1, f_2 liegen offenbar dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; auch die Funktionen vom Typ $(id \pm i)f_3$ liegen dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, weil bekanntlich $i d$ auf der Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger wesentlich selbstadjungiert ist. Da $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \cong L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \otimes \dots \otimes L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, folgt damit die Behauptung. Also ist $Q_3^{(m)} = i \partial_3$ (vgl. (5.7)ff.). Aus (5.9) ergibt sich schließlich nach elementarer Rechnung für $k=1,2,3$:

$$(5.14) \quad Q_k^{(m)} = m|s|^{-1}(|s| + s_3)^{-1} \sum_1 \varepsilon_{k13} s_1 + i \partial_k$$

und damit

$$(5.15) \quad Q_k^{(o,m)} = m|p|^{-1}(|p| + p_3)^{-1} \sum_1 \varepsilon_{k13} p_1 - \frac{i}{2} p_o^{-2} p_k + i \partial_k^*.$$

Dabei ist S_1 der Multiplikationsoperator $(S_1 f)(s) := s_1 f(s)$ in $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ und entsprechend Funktionen von (S_1) , P_o der Multiplikationsopera-

tor $(P_0 F)(p) := p_0 F(p)$ in $L^2(O^0, \mathbb{C})$ (s. (7.58)), und entsprechend P_1 sowie Funktionen von (P_1) , $l=1,2,3$. Ferner ist ∂_k die partielle Ableitung nach der k -ten Variablen und $(\partial_k^* F)(p) := (\partial_k F^*)(\underline{p})$ mit $F^*(\underline{p}) := F(p)$, $p_0 = |\underline{p}|$.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß jeder dilatationskovariante Ortsoperator zu einer reinen Lokalisierung eines masselosen Elementarsystems mit Helizität $m=0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \dots$, repräsentiert durch die Darstellung $U_p^{(o,m)}$, äquivalent ist zu $\underline{Q}^{(o,m)}$ aus (5.15). Im Fall $m=0$ ist $\underline{Q}^{(o,0)}$ der Ortsoperator nach WIGHTMAN; er ist der einzige Ortsoperator aus (5.15) mit vertauschenden Komponenten.

5.2.2 Der dilatationskovariante Ortsoperator des zweikomponentigen Photons.

Wir haben die Lokalisierungen (4.6a,b) zu betrachten. Trivialerweise ergibt sich zu (4.6a) der Ortsoperator $\underline{Q}^{(o,-1)} \oplus \underline{Q}^{(o,+1)}$ (vgl. (5.15)). Zu (4.6b) erhält man analog zu (5.11) ff.: $\text{Pr}_{-1,1}^j X i\partial_3 \cdot X^{-1} \text{In}_{-1,1}^j = i\partial_3 + \text{Pr}_{-1,1}^j D^{(j)}(B_s^{-1}) i\partial_3 D^{(j)}(B_s) \text{In}_{-1,1}^j$ (s. (5.15) ff.); der zweite Summand verschwindet, wie man aus (5.13) und (7.19a) ersieht. Deshalb sind die Ortsoperatoren zu (4.6b) für alle j aus $\mathbb{N}$ unabhängig, und zusammen mit (5.9) gilt:

$$(5.16) \quad \underline{Q}^{(o,-1,+1)} = \underline{Q}^{(o,-1)} \oplus \underline{Q}^{(o,+1)} \quad (\text{vgl. (5.15)}).$$

Hier zeigt sich erneut, wie wenig Information über die Ortsmessung i.allg. in dem Ortsoperator steckt. So täuscht die direkte Summe (5.16) die Verträglichkeit der Messungen von Ort und Helizität vor, die wegen der Irreduzibilität der Lokalisierung (4.6b) jedoch nicht besteht.

Die Operatoren (5.15) bzw. (5.16) sind aus der Literatur über einen anderen Zugang bekannt (s. [8,9,13]); vgl. dazu auch 5.3.1. Wie in [13] plausibel gezeigt wird, sind die Eigenschaften (5.4a) und (5.4b) unter Hinzunahme geeigneter Transformationseigenschaften unter Zeit- und Raumspiegelungen bereits ausreichend, um den Ortsoperator für das zweikomponentige Photon eindeutig festzulegen.

5.2.3 Dilatationskovariante Ortsoperatoren massiver Elementarsysteme.

Der Ortsoperator zur Lokalisierung (4.3) ist offensichtlich

$$(5.17) \quad \underline{Q}(\mu, j, hv) := \bigoplus_{m=-j}^j X_\mu^{-1} \underline{Q}^{(m)} X_\mu, \quad \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots,$$

vgl. (5.11), (5.14), (7.63).

Explizit ist

$$Q_k^{(\mu, j, hv)} = |\underline{P}|^{-1} (|\underline{P}| + P_3)^{-1} \text{He}^{(j)} \sum_1 \varepsilon_{k13} P_1 - \frac{i}{2} P_0^{-2} P_k + i \partial_k^{\wedge}$$

mit P_0 der Multiplikationsoperator $(P_0 F)(p) := P_0 F(p)$, $P_0 = (\mu^2 + |\underline{P}|^2)^{1/2}$, in $L^2(0^\mu, \mathbb{C})$ (s. (7.58)) u.s.w., entsprechend zu (5.15)ff..

Aus der Lokalisierung (4.11) erhält man den Ortsoperator

$$(5.18) \quad \underline{Q}^{(\mu, j)} := X_\mu^{-1} X_i \nabla X^{-1} X_\mu, \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots,$$

was aus (4.10) folgt. Seine Komponenten sind also zu den mit i multiplizierten partiellen Ableitungsoperatoren - wie im Fall der nichtrelativistischen Theorie - äquivalent. Insbesondere vertauschen daher seine Komponenten. Aus

$$\underline{Q}^{(\mu, j)} = D^{(j)}(\underline{B}_P^{-1}) i \nabla D^{(j)}(\underline{B}_P) - \frac{i}{2} \frac{P}{P_0^2} + i \nabla^{\wedge}$$

erhält man mit Hilfe von (5.13) und (5.9) explizit

$$Q_1^{(\mu, j)} = (2|\underline{P}|(|\underline{P}| + P_3))^{-1} d^j \left(-\frac{P_1 P_2}{|\underline{P}|} \sigma_1 - \frac{P_2^2 + P_3^2 + P_3 |\underline{P}|}{|\underline{P}|} \sigma_2 + P_2 \sigma_3 \right) - \frac{i}{2} \frac{P_1}{P_0^2} + i \partial_1^{\wedge},$$

$$(5.19) \quad Q_2^{(\mu, j)} = (2|\underline{P}|(|\underline{P}| + P_3))^{-1} d^j \left(-\frac{P_1^2 + P_3^2 + P_3 |\underline{P}|}{|\underline{P}|} \sigma_1 - \frac{P_1 P_2}{|\underline{P}|} \sigma_2 + P_1 \sigma_3 \right) - \frac{i}{2} \frac{P_2}{P_0^2} + i \partial_2^{\wedge},$$

$$Q_3^{(\mu, j)} = \frac{1}{2} |\underline{P}|^{-2} d^j (P_2 \sigma_1 - P_1 \sigma_2) - \frac{i}{2} \frac{P_3}{P_0^2} + i \partial_3^{\wedge}.$$

Vgl. dazu (7.19) und (5.17)ff..

Der Operator (5.18) bzw. (5.19) ist als NEWTON-WIGNER-Ortsoperator bekannt (s. [3] und [4]); vgl. dazu auch 5.3.2.

5.3 Ortsoperatoren und Erzeugende der Liealgebra der Poincarégruppe.

Um weiteren Einblick in die Natur der in Kap. 5.2 abgeleiteten Ortsoperatoren zu gewinnen, wollen wir sie durch die Erzeugendenelemente der Liealgebra der Poincarégruppe ausdrücken. P_0 , P_k , L_k und N_k stehen der Reihe nach für die Energie, die k -te Komponente des Impulses, des

Drehimpulses und der Erzeugenden der reinen Geschwindigkeitstransformationen, $1 \leq k \leq 3$; sie erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[P_0, P_k] = 0, [P_k, P_1] = 0, [P_0, L_k] = 0,$$

$$[L_k, X_1] = i \sum_m \varepsilon_{klm} X_m \quad \text{für } X_1 = P_1, L_1 \text{ oder } N_1,$$

$$[N_k, P_0] = iP_k, [N_k, P_1] = i \delta_{kl} P_0, [N_k, N_1] = \frac{1}{i} \sum_m \varepsilon_{klm} L_m.$$

In bezug auf eine stetige unitäre Darstellung U von P lassen sich diese Größen explizit durch

$$X = \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(x_t) - 1),$$

wobei $x_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Zeile}$, $C_{k,t}$ und $A_{k,t}$ (vgl.

(7.3)ff., (7.55)ff.), berechnen; näheres dazu s. [33]. Funktionen dieser Größen werden im Sinne des Funktionenkalküls selbstadjungierter Operatoren verstanden.

5.3.1 Ortsoperatoren im Masse-Null-Fall $U_P^{(0,m)}$. Die Operatoren

$$(5.20) \quad Q_k := \frac{1}{2} (P_0^{-1} N_k + N_k P_0^{-1}), \quad k=1,2,3,$$

erfüllen - wie man leicht nachprüft - die Vertauschungsrelationen (5.2a,b), womit sie sich als Komponenten eines Ortsoperators qualifizieren. Seine Komponenten vertauschen nicht; es gilt vielmehr

$$(5.21) \quad [Q_k, Q_1] = \frac{1}{i} P_0^{-2} \sum_m \varepsilon_{klm} S_m,$$

wobei

$$(5.22) \quad \underline{S} := \underline{L} - \underline{Q} \times \underline{P} = \underline{L} + P_0^{-1} (\underline{P} \times \underline{N}),$$

dem Spinoperator im massiven Fall nachgebildet ist (vgl. auch [13]).

(5.21) berechnet man direkt unter Verwendung von $[P_0^{-1}, N_k] = iP_0^{-2} P_k$. Hiermit läßt sich auch (5.20) nach N_k auflösen; man erhält

$$(5.23) \quad N_k = \frac{1}{2} (P_0 Q_k + Q_k P_0),$$

was eine Interpretation der Erzeugenden des Lorentz-Boosts als Energiemoment nahelegt.

Für masselose Elementarsysteme mit Helizität m folgt aus (7.62b)

$$N_k = m(|\underline{P}| + P_3)^{-1} \sum_m \varepsilon_{k13} P_1 + i P_0 \hat{\partial}_k$$

(s. (5.15)ff.), weshalb

$$(5.24) \quad \underline{Q}^{(0,m)} = \underline{Q}, \quad m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$$

(vgl. (5.15)). Der Ortsoperator zu den dilatationskovarianten Lokalisierungen (4.2) masseloser Elementarsysteme hat also die Darstellung (5.20) durch Erzeugendenelemente der Liealgebra. Wegen der direkten Summenstruktur der Darstellung des zweikomponentigen Photons und wegen (5.16) gilt dies auch für den Ortsoperator zu den Lokalisierungen (4.6a,b):

$$(5.25) \quad \underline{Q}^{(0,-1,+1)} = \underline{Q}.$$

5.3.2 Ortsoperatoren im Fall positiver Masse $U_P^{(\mu,j)}$. Sowohl der Operator $\underline{Q}$ aus (5.20) als auch die Operatoren

$$(5.26) \quad \underline{Q}^{hv} := \underline{Q} + \frac{\underline{P} \times \underline{L}}{|\underline{P}|^2} + \frac{\underline{P} \times (\underline{P} \times \underline{N})}{P_0 |\underline{P}|^2},$$

$$(5.27) \quad \underline{Q}^{NW} := \underline{Q} - \frac{\underline{P} \times \underline{L}}{M(M+P_0)} - \frac{\underline{P} \times (\underline{P} \times \underline{N})}{P_0 M(M+P_0)} \quad \text{mit } M := (P_0^2 - |\underline{P}|^2)^{1/2}$$

erfüllen die Vertauschungsrelationen (5.2a,b) und kommen daher als Ortsoperatoren für den Fall positiver Masse in Betracht.

$\underline{Q}^{hv}$ ist natürlich auch für masselose Systeme definiert; wie man jedoch direkt nachrechnet, ist in diesem Fall $\underline{Q}^{hv} = \underline{Q}$. Die Komponenten von $\underline{Q}^{hv}$ vertauschen i.allg. nicht. Eine etwas mühselige Rechnung zeigt:

$$(5.28) \quad [Q_k^{hv}, Q_l^{hv}] = \frac{1}{i} |\underline{P}|^{-2} \text{He} \sum_m \varepsilon_{klm} \frac{P_m}{|\underline{P}|},$$

wobei $\text{He} := \underline{L} \cdot \underline{P} / |\underline{P}|$ den Helizitätsoperator bezeichnet. Die charakteristische Eigenschaft von $\underline{Q}^{hv}$ ist

$$(5.29) \quad [Q_k^{hv}, \text{He}] = 0.$$

$\underline{Q}^{hv}$ beschreibt also eine Ortsmessung, die die Helizität des Systems

nicht stört. Tatsächlich ist

$$(5.30) \quad \underline{Q}^{(\mu, j, hv)} = \underline{Q}^{hv}, \quad \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots,$$

wobei $\underline{Q}^{(\mu, j, hv)}$ (s. (5.17)) zur Lokalisierung (4.8) gehört, deren sämtliche Lokalisierungsoperatoren mit dem Helizitätsoperator vertauschen (beachte (5.17)ff.).

Wie aus der Literatur bekannt, ist (5.27) die Darstellung des NEWTON-WIGNER-Ortsoperators durch Erzeugendenelemente der Liealgebra der Poincarégruppe. Für den aus der WIGHTMAN-Lokalisierung (4.11) gewonnenen Ortsoperator (5.19) gilt also

$$(5.31) \quad \underline{Q}^{(\mu, j)} = \underline{Q}^{NW}, \quad \mu \text{ aus } \mathbb{R}_+, \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Die charakteristische Eigenschaft von (5.27) ist

$$(5.32) \quad [Q_k^{NW}, Q_1^{NW}] = 0.$$

Für spinlose massive Systeme stimmen $\underline{Q}$, $\underline{Q}^{hv}$ und $\underline{Q}^{NW}$ überein.

6 Kovariante POV-Maße

Der grundlegende Begriff dieser Arbeit ist der eines kovarianten POV-Maßes, das wohl das erste Mal bei JAUCH und PIRON [6] im Zusammenhang mit einer Hilfskonstruktion eingeführt wurde. Dieser Begriff soll hier in eingehender Weise mathematisch untersucht werden. Das wesentliche Ergebnis dieses Kapitels ist der Darstellungssatz (6.7) für kovariante POV-Maße, der es mit Hilfe des Imprimativitätstheorems von MACKEY [20] (vgl. (6.9)) ermöglicht, diese vollständig zu charakterisieren und aufzusuchen. Die für den Beweis entscheidende Konstruktion des Erweiterungsraumes geht zurück auf NAIMARK und SZ.-NAGY (vgl. [14; Anhang §6]). Im übrigen haben wir bei den Beweisen die Voraussetzungen recht allgemein gehalten, was ohne größeren mathematischen Aufwand möglich war.

Vorweg erinnern wir an einige Bezeichnungen und Definitionen. Sei X eine Menge und Q eine Algebra bzw. eine σ -Algebra in X , d.i. ein nichtleeres System von Teilmengen von X , das unter Komplementbildung und der Bildung endlicher bzw. abzählbarer Vereinigungen abgeschlossen ist. Ist Q eine σ -Algebra, so heißt (X, Q) ein Meßraum; Q heißt abzählbar erzeugt, wenn es eine abzählbare Teilmenge von Q gibt derart, daß die von ihr erzeugte σ -Algebra bereits Q ist. Ist X ein topologischer Raum, so betrachten wir stets den Meßraum $(X, B(X))$ dazu; $B(X)$ ist dabei die σ -Algebra der Borelmengen von X , d.i. die von den offenen Mengen aus X erzeugte σ -Algebra in X . Seien (X_i, Q_i) , $i=1,2$, Meßräume. Eine Abbildung $s: X_1 \rightarrow X_2$ heißt meßbar, wenn $s^{-1}(Q_2) \subset Q_1$; s heißt ein Meßisomorphismus, wenn s bijektiv ist und s und s^{-1} meßbar sind: in diesem Fall nennt man X_1 und X_2 meßisomorph. Ist X_i ein topologischer Raum und $Q_i = B(X_i)$, $i=1,2$, so heißen die Begriffe entsprechend borelsch, Borelisomorphismus und borelisomorph. Eine Abbildung $S: Q_1 \rightarrow Q_2$ heißt ein σ -Algebra-Isomorphismus, wenn sie bijektiv ist und wenn gilt: $S(M) = S(M)$, $S(\bigcup_i M_i) = \bigcup_i S(M_i)$, $M_i \in Q_1$, $i \in \mathbb{N}$.

Eine Gruppe operiert auf einer Menge X mit der Wirkung $w: G \times X \rightarrow X$, $w(a, x) =: ax$, wenn gilt: $ex = x$, $a(bx) = (ab)x$, $e, a, b \in G$, e Einselement von G , $x \in X$. Für $\hat{x} \in X$ ist $G_{\hat{x}} := \{a \in G: a\hat{x} = \hat{x}\}$ bzw. $G\hat{x} := \{a\hat{x} \in X: a \in G\}$ die Stabilitätsgruppe von G in dem bzw. die Bahn von G durch den

Punkt $\hat{x}$. Die Wirkung (= Operation) von G auf X heißt transitiv, wenn $G\hat{x} = X$ für ein $\hat{x}$ aus X . Sind G eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum, so operiert G stetig auf X , wenn w stetig ist bzgl. der Produkttopologie auf $G \times X$.

Wir verstehen unter einem Hilbertraum stets einen komplexen Hilbertraum und unter einem Unterraum davon stets einen abgeschlossenen Unterraum. Ein Operator A in einem Hilbertraum H ist stetig, wenn $D(A) = H$ und $\|Af\| \leq C\|f\|$, $f \in H$, für ein $C > 0$. Ein Operator A in H heißt positiv, wenn $\langle f, Af \rangle \geq 0$ für alle f aus $D(A)$. Ein stetiger positiver Operator ist selbstadjungiert.

Def. Seien H ein Hilbertraum, (X, Q) ein Meßraum. Dann ist ein POV-Maß (POV = Positive Operator Valued) auf X in H eine Abbildung T von Q in die Menge der stetigen positiven Operatoren in H mit folgenden Eigenschaften:

- i) $T_X = 1$,
 (6.1) ii) $T_{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i} = \sum_{i=1}^{\infty} T_{M_i}$ (im Sinne der starken Operatortopologie) für jede Folge (M_i) paarweise disjunkter Mengen aus Q .

Ist T_M eine orthogonale Projektion für alle M aus Q , so heißt T ein PV-Maß (PV = Projection Valued).

Wegen i) und ii) folgt für M, N, M_i aus Q , $i \in \mathbb{N}$: $T_\emptyset = 0$, $T_M \leq T_N$ falls $M \subset N$, $\|T_M\| \leq 1$; ist E ein PV-Maß, so folgt zusätzlich:
 $E_M E_N = E_N E_M = E_{M \cap N}$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{M_i} = E_{\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i}$ und $E_M \perp E_N$ für $M \cap N = \emptyset$.

Ein POV-Maß T heißt irreduzibel, wenn die Menge der Operatoren T_M , M aus Q , irreduzibel ist. Ist T' ein weiteres POV-Maß auf X in H' , so heißen T und T' quivalent, wenn es einen Hilbertraumisomorphismus $B: H \rightarrow H'$ gibt derart, daß

$$(6.2) \quad T'_M = B T_M B^{-1} \quad \text{für alle } M \text{ aus } Q.$$

Ist E ein PV-Maß auf X in H und P eine orthogonale Projektion in H , so ist $T, T'_M := P E_M P$, f aus $P(H)$, ein POV-Maß auf X in $P(H)$, wie man leicht nachprüft. Der folgende Satz besagt die Umkehrbarkeit dieser Aussage.

Satz von NAIMARK und SZ.-NAGY. Sei T ein POV-Maß auf X in H . Dann gibt es einen Hilbertraum H^+ , der H als Unterraum enthält, und ein PV-Maß E auf X in H^+ derart, daß mit der orthogonalen Projektion P in H^+ auf H gilt:

- (6.3) i) $T_M f = P E_M f$ für alle f aus H , M aus Q ,
 ii) $H^+ = \text{span} \{ E_M f : M \text{ aus } Q, f \text{ aus } H \}$.
 (H^+, E) nennt man eine minimale Erweiterung von (H, T) . Je zwei minimale Erweiterungen von (H, T) sind äquivalent (vgl. (6.2)). Ist ii) nicht erfüllt, so heißt (H^+, E) lediglich eine Erweiterung von (H, T) .

Bemerkung. Wir geben den Beweis wider, da wir die explizite Konstruktion der Erweiterung (H^+, E) zum Beweis von (6.7) benötigen.

Beweis. Sei $V := \{ v = (v_M)_{M \in Q} \text{ mit } v_M \text{ aus } H \}$. V ist mit der komponentenweise erklärten Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum. Wir betrachten in V zwei Untervektorräume: W sei die Menge aller Vektoren aus V , deren Komponenten bis auf endlich viele Null sind und Z bestehe aus denjenigen Vektoren z aus V , für die es einen Vektor w aus W gibt derart, daß

$$(a) \quad z = \hat{w}, \quad \hat{w}_M := \sum_N T_{M \cap N} w_N, \quad M \text{ aus } Q.$$

Definition eines Skalarprodukts auf Z . Sei $[,] : Z \times Z \rightarrow \mathbb{C}$,

$$[z, z'] := \sum_M \langle z_M, w'_M \rangle = \sum_{M, N} \langle T_{M \cap N} w_N, w'_M \rangle =$$

$$(b) \quad = \sum_{M, N} \langle w_N, T_{M \cap N} w'_M \rangle = \sum_N \langle w_N, z'_N \rangle$$

mit $z = \hat{w}$, $z' = \hat{w}'$, w, w' aus W .

$[,]$ ist wohldefiniert - was aus obiger Kette von Gleichheiten folgt - und klarerweise sesquilinear sowie hermitesch. Sei M_i aus Q , f_i aus H , $1 \leq i \leq n$, n aus $\mathbb{N}$. Zu zeigen ist: $\sum_{i, j} \langle T_{M_i \cap M_j} f_i, f_j \rangle \geq 0$. Bezeichne A die endliche Menge der Atome der von M_i , $1 \leq i \leq n$, erzeugten Algebra Q' in X ; dabei heißt M aus Q' ein Atom, wenn für alle M' aus Q' mit $M' \subset M$ gilt: $M' = \emptyset$ oder $M' = M$. Mit $I(i, j) := \{ M \text{ aus } A : M \subset M_i \cap M_j \}$, $1 \leq i, j \leq n$, und $I(M) := \{ i : M \subset M_i \}$, M aus A , gilt:

$$\sum_{i, j} \langle T_{M_i \cap M_j} f_i, f_j \rangle = \sum_{i, j} \langle T_{\bigcup \{ M; M \in I(i, j) \}} f_i, f_j \rangle =$$

$$\sum_{i, j} \sum_{M \in I(i, j)} \langle T_M f_i, f_j \rangle = \sum_{M \in A} \sum_{i, j \in I(M)} \langle T_M f_i, f_j \rangle =$$

$$\sum_{M \in A} \langle T_M \sum_{i \in I(M)} f_i, \sum_{j \in I(M)} f_j \rangle \geq 0, \text{ weil } T_M \text{ positiv ist.}$$

Die Nichtentartetheit von $[\cdot, \cdot]$ erkennt man mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die nach dem bereits Bewiesenen gilt. Danach folgt aus $[z, z] = 0$ für z aus Z : $[z, z'] = 0$ für alle z' aus Z . Damit ist offensichtlich $z = 0$.

Z mit dem Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$ ist ein Prähilbertraum. H^+ sei seine Vervollständigung.

Definition einer linearen Isometrie von H in H^+ . Sei

$$(c) \quad i: H \longrightarrow H^+, \quad i(f) := (T_M f)_{M \in Q}.$$

i ist wohldefiniert, da für $w(f) \in W$, $w(f)_M := \delta_{XM} f$, gilt: $\hat{w}(f) = (T_M f)$, d.h. $i(f)$ aus Z für alle f aus H . Ferner ist i offensichtlich linear und wegen $[i(f), i(f')] = \sum_{M, N} \langle T_{M \cap N} w(f)_N, w(f')_M \rangle = \langle T_X f, f' \rangle = \langle f, f' \rangle$, f, f' aus H , isometrisch.

$H^i := i(H)$ bezeichne den zu H mittels i isomorphen Unterraum von H^+ .

Bestimmung der orthogonalen Projektion P in H^+ auf H^i . Sei z aus Z und f aus H . Dann ist $[Pz, i(f)] = [z, i(f)] = \sum_M \langle z_M, w(f)_M \rangle = \langle z_X, f \rangle = [i(z_X), i(f)]$. Daher gilt:

$$(d) \quad Pz = i(z_X), \quad z \text{ aus } Z.$$

Definition eines PV-Maßes E auf X in H^+ . Sei

$$(e) \quad E, (E_M z)_N := z_{M \cap N}, \quad M \text{ aus } Q, \quad z \text{ aus } Z.$$

Zunächst der Nachweis, daß E wohldefiniert ist.

1. Sei z aus Z , M aus Q . Wir wollen zeigen, daß z' , $z' := z_{M \cap N}$, ebenfalls aus Z ist. Sei w aus W mit $z = \hat{w}$. Dann ist $z'_N = \sum_L z'_L = \sum_{L \text{ mit } L \cap M = L'} w_L$ bzw.

$w'_L := 0$, falls es kein L aus Q mit $L \cap M = L'$ gibt. Nun ist $w'_L \neq 0$ nur dann, wenn $w_L \neq 0$ für mindestens ein L aus Q mit $L \cap M = L'$. Daher ist w' mit w aus W und $z' = \hat{w}'$ aus Z .

2. Für M aus Q sei $E'_M: Z \longrightarrow Z$, $(E'_M z)_N := z_{M \cap N}$. E'_M ist offensichtlich linear. Es gilt: a) $E'_X = \text{id}_Z$, $E'_\emptyset = 0$ (da $z_\emptyset = 0$ für z aus Z); b) $E'_M E'_N = E'_{M \cap N}$, insbesondere $E'^2_M = E'_M$; c) $[E'_M z, z'] = [z, E'_M z']$, z, z' aus Z . Die Eigenschaften a)-c) sind direkt nachrechenbar.

3. E'_M , M aus Q , ist stetig. Um dies nachzuweisen, verwenden wir die Bezeichnung von (b)ff. und zeigen zunächst:

$$(*) \quad \sum_{i, j} \langle T_{M_i \cap M_j \cap M} f_i, f_j \rangle \leq \sum_{i, j} \langle T_{M_i \cap M_j} f_i, f_j \rangle, \quad M \text{ aus } Q.$$

Wegen der Additivität von T läßt sich jeder Summand der rechten Seite als $\langle T_{M_i \cap M_j \cap M} f_i, f_j \rangle + \langle T_{M'_i \cap M'_j} f_i, f_j \rangle$ mit $M'_i := M_i \setminus M$, $1 \leq i \leq n$, schreiben. Von den beiden auf der rechten Seite entstehenden Summen ist die zweite nach (b)ff. nichtnegativ, woraus (*) folgt.

Sei nun z aus Z und w aus W mit $\hat{w} = z$. Dann ist nach 2.b,c) und mit (*): $[E'_M z, E'_M z] = [E'_M z, z] = \sum_{N, N'} \langle T_{M \cap N \cap N'} w_{N'}, w_N \rangle \leq \sum_{N, N'} \langle T_{N \cap N'} w_{N'}, w_N \rangle = [z, z']$, weshalb E'_M stetig ist. Die stetige Fortsetzung von E'_M auf H^+ wird mit E_M bezeichnet (vgl.(e)). E_M ist wegen 2.b,c) eine orthogonale Projektion.

Wir zeigen nun, daß E die PV-Maß-Eigenschaften (6.1) besitzt.

4. $E_X = 1$ gilt nach 2.a). Sei (M_i) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus Q , $M := \bigcup_i M_i$, f_1, f_2 aus H . Dann ist $(\langle T_{M_i} f_1, f_2 \rangle)$ aufgrund der Abschätzung $|\langle T_{M_i} f_1, f_2 \rangle| = |\langle T_{M_i}^{1/2} f_1, T_{M_i}^{1/2} f_2 \rangle| =$

$$\|T_{M_i}^{1/2} f_1\| \|T_{M_i}^{1/2} f_2\| = \langle T_{M_i} f_1, f_1 \rangle^{1/2} \langle T_{M_i} f_2, f_2 \rangle^{1/2} \text{ und wegen}$$

$\sum_i \langle T_{M_i} f_j, f_j \rangle = \langle T_M f_j, f_j \rangle$, $j=1,2$, sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung absolut summierbar. In der direkten Berechnung von $[E_M z, z']$ mit Hilfe von (b) und (e) sind daher die Summationen beliebig vertauschbar und man erhält aus der abzählbaren Additivität von T die von E .

Zusammenhang zwischen E und T . Sei f aus H , M aus Q . Dann gilt nach (c), (d) und (e): $PE_M i(f) = i((E_M i(f))_X) = i(i(f)_M) = i(T_M f)$, weshalb bei Identifizierung von H mit H^i mittels i die Beh. (6.3i) folgt.

Minimalität von (H^+, E) . Sei z aus Z : $z_M = \sum_N T_{M \cap N} w_N = \sum_N (E_N \cdot i(w_N))_M$ mit w aus W , $z = \hat{w}$ und M aus Q . Also ist $z = \sum_N E_N i(w_N)$, was eine endliche Summe von Elementen der Form $E_N z_N$ mit z_N aus H^i ist. Bei Identifizierung von H mit H^i mittels i folgt daraus die Beh. (6.3ii).

Äquivalenz zweier minimaler Erweiterungen (H_j^+, E_j) , $j=1,2$. Sei Z_j der von den Vektoren $E_{j,M} f$, M aus Q , f aus H , erzeugte Vektorraum; er ist nach Voraussetzung dicht in H_j^+ , $j=1,2$. Wir setzen

$$(f) \quad \beta': Z_1 \longrightarrow Z_2, \quad \beta'(\sum_N E_{1,M} w_M) := \sum_M E_{2,M} w_M, \quad w \text{ aus } W.$$

$$\text{Aus } \left\langle \sum_M E_{j,M} w_M, \sum_N E_{j,N} w'_N \right\rangle = \sum_{M,N} \left\langle E_{j,M \cap N} w_M, w'_N \right\rangle = \\ \sum_{M,N} \left\langle T_{M \cap N} w_M, w'_N \right\rangle, \quad w, w' \text{ aus } W, \quad j=1,2, \text{ folgt unmittelbar, da\ss } \beta'$$

wohldefiniert und isometrisch ist. Da β' klarerweise auch linear und surjektiv ist, erhält man in der mit β bezeichneten stetigen Fortsetzung von β' einen Isomorphismus von H_1^+ auf H_2^+ . Der H_1^+ und H_2^+ gemeinsame Unterraum H wird mittels β identisch auf sich abgebildet. Nun ist $\beta E_{1,M} \beta^{-1} \left(\sum_N E_{2,N} w'_N \right) = \beta E_{1,M} \sum_N E_{1,N} w'_N =$

$$\beta \sum_N E_{1,M \cap N} w'_N = \sum_N E_{2,M \cap N} w'_N = E_{2,M} \sum_N E_{2,N} w'_N, \quad w \text{ aus } W, \text{ wo-}$$

raus aus Stetigkeitsgründen der Rest der Behauptung folgt. ■

Der folgende Satz besagt, da\ss der minimale Erweiterungsraum H^+ separabel ist, wenn H separabel ist und Q abzählbar erzeugt wird.

Satz. Seien (X, Q) ein Me\ssraum und Q abzählbar erzeugt, H^+ ein Hilbertraum, J eine separable Teilmenge von H^+ , E ein PV-(6.4) Ma\ss auf X in H^+ . Liegt die lineare Hülle der Vektoren $E_M f$, M aus Q , f aus J , dicht in H^+ , so ist H^+ separabel.

Beweis. Der erste Schritt des Beweises besteht in der Rückführung des Problems auf den Fall $(X, Q) = (A, B)$, wobei entweder A abzählbar und B die Potenzmenge von A ist, oder $A = \mathbb{R}$ und $B = B(\mathbb{R})$ die σ -Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}$ ist. Au\sserdem genügt es offensichtlich, anstelle von J den separablen Unterraum $H := \overline{\text{span } J}$ von H^+ zu betrachten.

Da Q abzählbar erzeugt ist, existiert nach [15; Kap.V, Th.2.2] ein separabler metrischer Raum Y und ein σ -Algebra-Isomorphismus S von Q auf $B(Y)$. Sei nun $Y^\wedge$ eine Vervollständigung von Y . Es ist $B(Y)$ die Spur von $B(Y^\wedge)$ in Y . Nach [15; Kap.I, Th.2.8, 2.12] ist $(Y^\wedge, B(Y^\wedge))$ borelisomorph zu (A, B) . Den Borelisomorphismus nennen wir s , $s: Y^\wedge \rightarrow A$. Wir setzen $E'_M := E_{S^{-1}(s^{-1}(M) \cap Y)}$, M aus B . Dann ist E' ein PV-Ma\ss auf A in H^+ und

$$\{E_M f: M \text{ aus } Q, f \text{ aus } H\} = \{E'_M f: M \text{ aus } B, f \text{ aus } H\},$$

so da\ss die gewünschte Rückführung erreicht ist.

1. A abzählbar. Sei (f_n) eine ONB von H . Für $f = \sum_n a_n f_n$ aus H und M aus B gilt: $E_M f = \sum_{x \in M} \sum_n a_n E_{\{x\}} f_n$, weshalb die abzhlba-

re Menge $\{E_{\{x\}}f_n: x \text{ aus } A, n \text{ aus } \mathbb{N}\}$ nach Voraussetzung total in H^+ ist.

2. $A = \mathbb{R}$. Sei (f_n) eine ONB von H . $m_n, m_n(M) := \langle f_n, E_M f_n \rangle$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (WM) auf $\mathbb{R}, n \text{ aus } \mathbb{N}$. Für das WM $m := \sum_n 2^{-n} m_n$ beweist man

$$E_M f = 0 \text{ für alle } f \text{ aus } H \iff m(M) = 0, \quad M \text{ aus } \mathcal{B},$$

wie folgt: $E_M f = 0$ für alle f aus $H \iff E_M f_n = 0, n \text{ aus } \mathbb{N} \iff m_n(M) = 0, n \text{ aus } \mathbb{N} \iff m(M) = 0$. m ist als WM auf einem metrischen Raum nach [15; Kap. II, Th. 1.21] regulär. Zu M aus $\mathcal{B}$ existiert daher eine Folge (M_n) offener Mengen mit $M \subset M_{n+1} \subset M_n$ derart, daß für $M_o := \bigcap_n M_n$ gilt: $m(M_o \setminus M) = 0$. Damit ist $E_M f = E_M f + E_{M_o \setminus M} f = E_{M_o} f = \bigcap_n E_{M_n} f = \lim_n E_{M_n} f, f \text{ aus } H$, wie man sich leicht überlegt. Also ist bereits die lineare Hülle der Menge aller $E_M f$ mit M offen, f aus H , dicht in H^+ . Da jede offene Menge in $\mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle ist, genügt es dabei wegen (6.1ii) M als offenes Intervall zu wählen. Wir schreiben nun jedes offene Intervall I als abzählbare Vereinigung einer aufsteigenden Folge offener Intervalle I_n mit rationalen Endpunkten. Dann ist $E_I = \bigcup_n E_{I_n} = \lim_n E_{I_n}$. Entwickelt man noch jedes Element aus H nach (f_n) , so erkennt man schließlich, daß die abzählbare Menge $\{E_{[r,r']}f_n: r, r' \text{ aus } \mathbb{Q}, r < r', n \text{ aus } \mathbb{N}\}$ total ist in H^+ .

Bemerkung. Ist X ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie und $Q = B(X)$, so ist Q abzählbar erzeugt. Damit ist die in (6.4) über Q gemachte Voraussetzung in einem für die Praxis wichtigen Fall erfüllt.

Wir untersuchen nun kovariante POV-Maße bzw. Kovarianzsysteme.

Def. Seien G eine Gruppe, (X, Q) ein Meßraum, H ein Hilbertraum, U eine unitäre Darstellung von G in H und T ein POV-Maß auf X in H . G operiere auf X derart, daß aM aus Q für alle a aus G, M aus Q (d.h. G ist eine Gruppe von Meßautomorphismen auf X). Dann heißen T kovariant unter G und (U, T) ein Kovarianzsystem zu (G, X) in H , wenn gilt:

$$i) \quad U_a T_M U_a^{-1} = T_{aM}, \quad a \text{ aus } G, M \text{ aus } Q.$$

(6.5) Ist T ein PV-Maß, so nennt man (U, T) ein Imprimitivitätssystem.

Das Kovarianzsystem (U, T) heißt irreduzibel, wenn die Menge der Operatoren U_a, T_M , a aus G , M aus Q , irreduzibel ist. Ist (U', T') ein weiteres Kovarianzsystem zu (G, X) in H' , so heißen (U, T) und (U', T') äquivalent, wenn es einen Hilbertraumisomorphismus β von H auf H' gibt derart, daß

$$(6.6) \quad U'_a = \beta U_a \beta^{-1}, \quad T'_M = \beta T_M \beta^{-1}, \quad a \text{ aus } G, M \text{ aus } Q.$$

Ist (V, E) ein Imprimitivitätssystem zu (G, X) in H und P eine orthogonale Projektion in H , die V reduziert, so ist (U, T) , $U_a f := V_a f$, $T_M f := P E_M f$, f aus $P(H)$, ein Kovarianzsystem zu (G, X) in $P(H)$, wie man leicht nachprüft. Der folgende Satz besagt die Umkehrbarkeit dieser Aussage.

Darstellungssatz für kovariante POV-Maße. Sei (U, T) ein Kovarianzsystem zu (G, X) in H (s. (6.5)). Dann gibt es eine minimale Erweiterung (H^+, E) von (H, T) (vgl. (6.3)) und eine unitäre Darstellung V von G in H^+ derart, daß gilt:

- i) (V, E) ist ein Imprimitivitätssystem zu (G, X) in H^+ ;
- ii) H ist invariant unter V und U ist die Reduktion von V auf H , d.h. $V_a f = U_a f$ für alle a aus G , f aus H .

(H^+, V, E) nennt man eine minimale Erweiterung von (H, U, T) .

(6.7) Je zwei minimale Erweiterungen von (H, U, T) sind äquivalent (vgl. (6.6)). Ist (6.3ii) nicht erfüllt, so heißt (H^+, V, E) lediglich eine Erweiterung von (H, U, T) .

Seien überdies G lokalkompakt, Q abzählbar erzeugt, H separabel und U stetig; G operiere meßbar auf X , d.h. die Wirkung $w: G \times X \rightarrow X$, $w(a, x) = ax$, ist meßbar bzgl. der Produkt- σ -Algebra auf $G \times X$. Dann ist für jede minimale Erweiterung (H^+, V, E) die Darstellung V stetig.

Beweis.⁴⁾ Wir benutzen die Beweiskonstruktion zu (6.3).

Definition einer unitären Darstellung V von G in H^+ . Sei

$$(g) \quad V, (V_a z)_M := U_a z_{a^{-1}M}, \quad a \text{ aus } G, z \text{ aus } Z, M \text{ aus } Q.$$

Sei z aus Z und a aus G . Wir wollen zeigen, daß z' , $z'_M := U_a z_{a^{-1}M}$,

⁴⁾ Nach Fertigstellung der Arbeit haben wir festgestellt, daß (6.7) bereits von NEUMANN [36] bewiesen worden ist.

ebenfalls aus Z ist. Sei w aus W mit $z = \hat{w}$. Dann ist $z'_M = \sum_N U_a \cdot T_{a-1M} \cdot w_N = \sum_N T_{M \cap aN} U_a w_N = \sum_N T_{M \cap N} w'_N$ mit $w'_N :=$

$U_a w_{a-1N}$. Nun ist offensichtlich w' mit w aus W und daher $z' = \hat{w}'$ aus Z .

Für a aus G sei $V'_a: Z \longrightarrow Z$, $(V'_a z)_M := U_a z_{a-1M}$. V'_a ist offensichtlich linear. Es gilt: a) $V'_e = \text{id}_Z$; b) $V'_a V'_b = V'_{ab}$; c) $[V'_a z, z'] = [z, V'_{a-1} z']$, z, z' aus Z . Die Eigenschaften a)-c) sind direkt nachrechenbar.

Aus a)-c) folgt unmittelbar, daß V'_a eine surjektive Isometrie ist. Ihre mit V_a bezeichnete stetige Fortsetzung (vgl. (g)) ist unitär. Aus Stetigkeitsgründen folgt schließlich aus b), daß V eine Darstellung von G in H^+ ist.

Zusammenhang zwischen V und U . Sei f aus H , a aus G . Dann gilt nach (6.3(c)), (6.5i) und (g): $(V_a i(f))_M = U_a i(f)_{a-1M} = U_a T_{a-1M} f = T_{M a} U_a f = i(U_a f)_M$, M aus Q , d.h. $V_a i(f) = i(U_a f)$. Identifiziert man H mit H^i mittels i , so folgt ii).

(V, E) ist ein Imprimitivitätssystem zu (G, X) in H^+ . Sei z aus Z , a aus G , M aus Q . Dann gilt nach (6.3(e)) und (g): $(V_a E_M V_a^{-1} z)_N = U_a (E_M V_a^{-1} z)_{a-1N} = U_a (V_{a-1} z)_{a-1N \cap M} = U_a U_{a-1} z_{N \cap aM} = (E_{aM} z)_N$, N aus Q . Daraus folgt aus Stetigkeitsgründen

$$V_a E_M V_a^{-1} = E_{aM}, \quad a \text{ aus } G, M \text{ aus } Q.$$

Äquivalenz zweier minimaler Erweiterungen (H_j^+, V_j, E_j) , $j=1,2$. Für B aus (6.3(f)ff.) gilt mit w aus W : $BV_{1,a} \beta^{-1} \left(\sum_M E_{2,M} w_M \right) = B \left(\sum_M V_{1,M} E_{1,M} w_M \right) = B \left(\sum_M E_{1,aM} V_{1,a} w_M \right) = \sum_M E_{2,aM} V_{2,a} w_M = V_{2,a} \left(\sum_M E_{2,M} w_M \right)$, da nach ii) $V_{1,a}$ und $V_{2,a}$ auf H übereinstimmen. Daher ist aus Stetigkeitsgründen $BV_{1,a} \beta^{-1} = V_{2,a}$, a aus G . Der Rest der Behauptung folgt nach (6.3).

Stetigkeit von V unter den zusätzlichen Voraussetzungen. Da nach (6.4) jeder minimale Erweiterungsraum H^+ separabel ist, genügt es nach [17; Kap.V, 7, Th.3] nachzuweisen, daß V schwach borelsch, d.h. die Abbildung $G \longrightarrow C$, $a \longmapsto \langle f, V_a f \rangle$, für alle f, f' aus H^+ borelsch ist. Dabei reicht es, f' aus einem dichten Teilraum von

H^+ zu wählen, da nach [18; (C.9)] der punktweise Limes einer Folge von meßbaren Abbildungen wieder meßbar ist. Wegen (6.3ii) und aus Gründen der Linearität ist es daher hinreichend, die Meßbarkeit von $a \mapsto \langle f, V_{E_{aM}} f' \rangle = \langle E_{aM} f; U_a f' \rangle$ für f aus H^+ , f' aus H , M aus Q , nachzuweisen. Wir werden die Meßbarkeit von $a \mapsto \langle E_{aM} f, f \rangle$, f aus H^+ , M aus Q , zeigen. Daraus folgt mit Hilfe der Polaridentität, daß $a \mapsto \langle E_{aM} f, f' \rangle$, f, f' aus H^+ , borelsch ist, und daraus, indem man $E_{aM} f$ nach einer (abzählbaren) ONB von H^+ entwickelt, nach dem eben zitierten Satz [18; (C.9)] die Meßbarkeit von $a \mapsto E_{aM} f$; mit der Stetigkeit von U ergibt sich schließlich das gewünschte Ergebnis.

Nach dem Satz von HAHN-HELLINGER ist (H^+, E) äquivalent zu $(H^{+'}, E')$ mit $H^{+'} = \bigoplus_n L_m^2(X, \mathbb{C})$, m_n Wahrscheinlichkeitsmaß auf X , $n=1,2,3,\dots$,

$E'_M(f_n) = (1_M f_n)$, (f_n) aus $H^{+'}$. Damit ist $a \mapsto \langle E_{aM} f, f \rangle = \sum_n \cdot$

$\langle 1_{aM} f_n, f_n \rangle$, weshalb die Meßbarkeit dieser Funktion aus der Meßbarkeit jeder ihrer Komponenten folgt. Wir können uns daher auf eine Komponente beschränken und lassen den Index n weg. Für f aus $L_m^2(X, \mathbb{C})$, M aus Q ist $G \times X \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, x) \mapsto 1_{aM}(x) |f(x)|^2 = 1_M(w(a^{-1}, x)) |f(x)|^2$, nichtnegativ und wegen der Meßbarkeit der Wirkung w meßbar. Daher ist nach [19; Th. (21.12(iv))I] - auf G wähle man das Nullmaß - $a \mapsto \langle 1_{aM} f, f \rangle = \int 1_M(w(a^{-1}, x)) |f(x)|^2 dm(x)$ borelsch.

Bemerkung. Wesentlich für den vorangegangenen Beweis der Stetigkeit von V ist die Separabilität von H^+ . Die Voraussetzungen 'H separabel und Q abzählbar erzeugt' wurden nur gemacht, um dies nach (6.4) zu gewährleisten. Vermutlich kann man bei transitiver Gruppenoperation auf die Separabilität von H^+ verzichten.

Schließlich folgen einige Aussagen über Erweiterungen.

Satz. Es gelte (6.5) mit $H \neq \{0\}$. Dann

- i) enthält jede Erweiterung eines Kovarianzsystems eine minimale Erweiterung,
 - ii) ist jede irreduzible Erweiterung eines Kovarianzsystems minimal,
 - iii) sind minimale Erweiterungen äquivalenter Kovarianzsysteme äquivalent,
 - iv) ist jede Erweiterung eines reduziblen Kovarianzsystems reduzibel.
- (6.8)

Beweis. i) Sei (H^+, V, E) eine Erweiterung von (H, U, T) und H_0 der von den Vektoren $E_M f$, M aus Q , f aus H , erzeugte Unterraum von H^+ . Wegen $E_N E_M f = E_{N \cap M} f$ aus H_0 und $\langle E_N g, E_M f \rangle = \langle g, E_{N \cap M} f \rangle = 0$, M aus Q , f aus H , g aus $H_0^\perp$, läßt E_N , N aus Q , sowohl H_0 wie $H_0^\perp$ invariant; auch V_a , a aus G , läßt wegen $V_a E_M f = E_{aM} V_a f = E_{aM} U_a f$ aus H_0 und $\langle V_a g, E_M f \rangle = \langle g, V_a^{-1} E_M f \rangle = \langle g, E_{a^{-1}M} U_{a^{-1}} f \rangle = 0$ sowohl H_0 wie $H_0^\perp$ invariant. Klarerweise ist die Reduktion von (H^+, V, E) auf H_0 eine minimale Erweiterung von (H, U, T) . ii) folgt sofort aus i). iii) Seien (H_j, U_j, T_j) , $j=1,2$, mittels $\beta: H_1 \longrightarrow H_2$ äquivalent (vgl. (6.6)) und (H_j^+, V_j, E_j) eine minimale Erweiterung von (H_j, U_j, T_j) , $j=1,2$. Da $\{E_{j,M} f: M \text{ aus } Q, f \text{ aus } H_j\}$ total ist in H_j^+ , $j=1,2$, ist durch $\beta^+(E_{1,M} f) = E_{2,M} \beta(f)$ wegen $\langle \beta^+(E_{1,M} f), \beta^+(E_{1,M'} f') \rangle = \langle E_{2,M} \beta(f), E_{2,M'} \beta(f') \rangle = \langle \beta(f), E_{2, M \cap M'} \beta(f') \rangle = \langle \beta(f), T_{2, M \cap M'} \beta(f') \rangle = \langle f, T_{1, M \cap M'} f' \rangle = \langle E_{1,M} f, E_{1,M'} f' \rangle$, f, f' aus H_1 , M, M' aus Q , mittels linearer und dann stetiger Fortsetzung ein Hilbertraumisomorphismus $\beta^+: H_1^+ \longrightarrow H_2^+$ definiert, von dem man direkt nachrechnet, daß er die Äquivalenz von (H_j^+, V_j, E_j) , $j=1,2$, vermittelt. iv) Man schreibt das System als direkte Summe zweier Teilsysteme und bildet die direkte Summe aus deren minimalen Erweiterungen. Diese ist offensichtlich eine reduzierbare minimale Erweiterung des Systems. Aus i) und iii) folgt die Behauptung. ■

Ein POV-Maß T auf X in H läßt sich auffassen als das Kovarianzsystem $(1, T)$ zu $(\{e\}, X)$ in H ; in diesem Sinn gilt (6.8) auch für POV-Maße.

Der Satz (6.7) erlaubt es, die Untersuchung der kovarianten POV-Maße auf die der spezielleren kovarianten PV-Maße zurückzuführen. Das bekannte Imprimitivitätstheorem von MACKEY [20] charakterisiert letztere vollständig für den Fall transitiver Gruppenwirkung. Wir geben es in der folgenden für uns zweckmäßigen Form an.

Imprimitivitätstheorem. Seien G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie, X ein lokalkompakter Raum, ξ aus X beliebig und H ein separabler Hilbertraum; G operiere (6.9) stetig und transitiv auf X . Dann ist jedes Imprimitivitätssystem (V, E) zu (G, X) in H mit stetigem V äquivalent zu einem kanonischen Imprimitivitätssystem (U^G, E^{kan}) zu (G, X)

in $L_m^2(X, H_U)$. Dabei ist U eine stetige unitäre Darstellung der Stabilitätsgruppe $G_{\hat{x}}$ in $\hat{x}$ im Hilbertraum H_U , U^G die von U induzierte Darstellung

$$U^G: G \longrightarrow U(L_m^2(X, H_U)),$$

$$(U_a^G f)(x) := ((dm^a/dm)(x))^{1/2} U(R(x, a)) f(a^{-1}x),$$

(6.9) wobei m das bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte nichttriviale, reguläre Borelmaß auf X ist, das unter G quasiinvariant ist, $m^a(M) := m(a^{-1}M)$, M aus $B(X)$, dm^a/dm die Radon-Nikodym-Ableitung, $q: X \longrightarrow G$ ein Borelquerschnitt bzgl. der Surjektion $G \longrightarrow X$, $a \longmapsto a\hat{x}$, und $R(x, a) := q(x)^{-1} a q(a^{-1}x)$,

und E^{kan} das kanonische PV-Maß auf X in $L_m^2(X, H_U)$ mit $E_M^{\text{kan}} f := 1_M f$, M aus $B(X)$. Zwei kanonische Imprimitivitätssysteme zu (G, X) sind genau dann äquivalent bzw. irreduzibel, wenn die zugehörigen Darstellungen der Stabilitätsgruppe äquivalent bzw. irreduzibel sind.

Bemerkung. Das Imprimitivitätstheorem wird meist für den Fall formuliert, daß X der Quotientenraum von G nach einer ihrer abgeschlossenen Untergruppen und die Gruppenwirkung die kanonische ist; zudem wird die induzierte Darstellung U^G in einer zur obigen äquivalenten Form angegeben, für die die Existenz des Querschnitts q nicht benötigt wird. In diesem Fall kommt LOOMIS [21] ohne die Voraussetzung der abzählbaren Basis der Topologie von G und der Separabilität von H aus.

Der folgende Satz rechtfertigt die Formulierung (6.9) des Imprimitivitätstheorems.

Satz. Seien G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie und X ein lokalkompakter Raum; G operiere stetig und transitiv auf X . Dann ist die Stabilitätsgruppe G_x in x aus X abgeschlossen, die kanonische Bijektion

$$(6.10) \quad b_x: G/G_x \longrightarrow X, \quad b_x(aG_x) := ax,$$

ein Homöomorphismus und es existiert ein Borelquerschnitt $q: X \longrightarrow G$ bzgl. der Surjektion $G \longrightarrow X$, $a \longmapsto ax$.

Beweis. Die Homöomorphieeigenschaft folgt sofort aus [18;(2.32b, d,e)1]. Damit folgt aus [18;(C.10b)] die Existenz eines Borelquerschnitts q .

Man überzeugt sich leicht, daß die G -Räume G/G_X und X mittels b_X topologisch äquivalent sind.

Da mit G auch G/G_X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, trifft dies auch für X zu. Insbesondere ist also $B(X)$ abzählbar erzeugt. Mit dieser letzten Bemerkung können wir zusammenfassend feststellen:

(6.11) Es gelten die Voraussetzungen von (6.9). Dann besitzt jedes Kovarianzsystem (U, T) zu (G, X) in einem separablen Hilbertraum mit stetiger Darstellung von G eine minimale Erweiterung, die äquivalent ist zu einem kanonischen Imprimitivitätssystem (vgl. (6.9)). Um einen bis auf Äquivalenz vollständigen Satz von Kovarianzsystemen zu (G, X) (in separablen Hilberträumen) mit stetiger Darstellung von G zu finden, genügt es, aus jeder Äquivalenzklasse von stetigen unitären Darstellungen einer fest gewählten Stabilitätsgruppe einen Repräsentanten zu wählen, damit eine Darstellung von G zu induzieren, deren invariante Unterräume aufzusuchen und das in (6.6)ff. beschriebene Projektionsverfahren auf die kanonischen Imprimitivitätssysteme anzuwenden.

Abschließend beschäftigen wir uns noch kurz mit POV-Inhalten: Ist in (6.1) Q lediglich eine Algebra und gilt (6.1ii) nur für endliche Folgen (M_i) paarweise disjunkter Mengen aus Q , so heißt T ein POV-Inhalt auf X in H . Die folgenden Untersuchungen behandeln die Frage der Fortsetzbarkeit eines POV-Inhalts zu einem POV-Maß.

(6.12) Lemma. Seien T_0, T_n , n aus $\mathbb{N}$, positive stetige Operatoren in einem Hilbertraum H mit $T_n \leq T_{n+1} \leq T_0$ (bzw. $T_n \geq T_{n+1}$) für alle n aus $\mathbb{N}$. Dann existieren und stimmen überein:
 $\lim_n T_n$ im Sinne der starken Operatortopologie und $\sup_n T_n$ (bzw. $\inf_n T_n$) im Sinne der Halbordnung ' $\leq$ '.

Den auf der Hand liegenden Beweis lassen wir weg.

Satz. Seien X eine Menge, Q eine Algebra in X , $Q^\wedge$ die von Q erzeugte $\mathcal{G}$ -Algebra in X , H ein Hilbertraum, T ein POV-Inhalt auf (X, Q) in H ; m sei ein Kontrollinhalt zu T , d.i. ein auf 1 normierter Inhalt auf (X, Q) mit der Eigenschaft:

$$(6.13) \quad m(M_i) \longrightarrow 0 \iff T_{M_i} \longrightarrow 0 \text{ (im Sinne der starken Operatorortopologie) f\"ur jede Folge } (M_i) \text{ aus } Q. \text{ Dann l\"a\ss t sich } T \text{ genau dann zu einem POV-Ma\ss auf } (X, Q^\wedge) \text{ fortsetzen, wenn } m \text{ } \mathcal{G}\text{-additiv ist; die Fortsetzung von } T \text{ auf } (X, Q^\wedge) \text{ ist eindeutig.}$$

Beweis. 1) Sei T fortsetzbar zu einem POV-Maß. Dann ist - wie man sich leicht überlegt - $\lim_i T_{M_i} = 0$ für (M_i) aus Q mit $M_i \downarrow \emptyset$. Damit ist $\lim_i m(M_i) = 0$, weshalb m nach [16;3.2] $\mathcal{G}$ -additiv ist.

2) Sei m $\mathcal{G}$ -additiv. Nach [16;5.2,5.7] existiert genau eine Fortsetzung $m^\wedge$ von m auf $Q^\wedge$ und es gilt für alle N aus $Q^\wedge$:

$$m^\wedge(N) = \inf \left\{ \sum_i m(M_i) : (M_i) \text{ aus } Q \text{ mit } N \subset \bigcup_i M_i \right\}.$$

Daher ist $W(N) := \{ (M_{ij}) \text{ aus } Q : M_{ij} \uparrow \bigcup_{j'} M_{ij'}, \supset N, M_{ij} \downarrow \bigcap_{i'} M_{i'j} \}$,

i, j aus $\mathbb{N}$, $m^\wedge(N) = m^\wedge(\bigcap_i \bigcup_j M_{ij}) \neq \emptyset$ für alle N aus $Q^\wedge$, was man sich leicht überlegt. Aus der Definition von $W(N)$ folgt elementar:

(*) Zu (M_{ij}) aus $W(N)$ und i, n aus $\mathbb{N}$ existieren $i_n, j_{n,i}$ aus $\mathbb{N}$ derart, daß $m^\wedge(N \triangle M_{ij}) \leq 1/n$ für alle $i \geq i_n, j \geq j_{n,i}$.

Sei nun $T_N^\wedge := \inf_i \sup_j T_{M_{ij}}$ für N aus $Q^\wedge$, (M_{ij}) aus $W(N)$. Nach (6.12) existiert die rechte Seite der Definition, weshalb sie insbesondere ein positiver stetiger Operator ist.

a) Wir zeigen als erstes, daß $T_N^\wedge$ nicht von der Wahl von (M_{ij}) aus $W(N)$ abhängt. Sei (M_{ij}^1) aus $W(N)$, $1=1,2$. Damit ist $(M_{ij}^0) := (M_{ij}^1 \cap M_{ij}^2)$ aus $W(N)$ und für $T_N^{\wedge 1} := \inf_i \sup_j T_{M_{ij}^1}$, $1=0,1,2$, offensichtlich $T_N^0 \leq T_N^1$, $1=1,2$. Angenommen $T_N^0 < T_N^1$: Dann existiert f aus H mit $\langle f, T_N^1 f \rangle - \langle f, T_N^0 f \rangle =: 2c > 0$. Aus der Definition von T_N^1 ,

$l=0,1$, folgt elementar: Es existiert i_0 aus $\mathbb{N}$ und zu i aus $\mathbb{N}$ ein j_i aus $\mathbb{N}$ derart, daß für alle $i \geq i_0$ und $j \geq j_i$ gilt: $c \leq \langle f, T_{M_{i,j}^1 \setminus M_{i,j}^0} f \rangle$. Damit und mit (*) angewandt auf $(M_{i,j}^1)$, $l=0,1$, existieren i_n, j_n aus $\mathbb{N}$ zu n aus $\mathbb{N}$ derart, daß für $L_n^1 := M_{i_n j_n}^1$

gilt: $m(L_n^1 \setminus L_n^0) = m^*(N \Delta L_n^1 \Delta N \Delta L_n^0) \leq m^*(N \Delta L_n^1) + m^*(N \Delta L_n^0) \leq 2/n$, während $\langle f, T_{L_n^1 \setminus L_n^0} f \rangle \geq c$. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, daß m ein Kontrollinhalt zu T ist. Ebenso folgt $T_N^{\wedge 0} = T_N^{\wedge 2}$.

b) Wir zeigen die Additivität von $T^{\wedge}$. Sei N^1 aus $Q^{\wedge}$ und (M_{ij}^1) aus $W(N^1)$, $l=0,1$. Dann ist - wie man sich leicht überlegt - $(L_{ij}^0) := (M_{ij}^1 \cap M_{ij}^2)$ aus $W(N^1 \cap N^2)$ und $(L_{ij}^1) := (M_{ij}^1 \cup M_{ij}^2)$ aus $W(N^1 \cup N^2)$. Damit ist $T_{L_{ij}^0} + T_{L_{ij}^1} = T_{M_{ij}^1} + T_{M_{ij}^2}$, weshalb nach Ausführung der Grenzprozesse nach (6.12) die Additivität von $T^{\wedge}$ folgt.

c) Wir zeigen die Φ -Stetigkeit von $T^{\wedge}$. Sei (N^1) aus $Q^{\wedge}$ mit $N^1 \downarrow \Phi$ und (M_{ij}^1) aus $W(N^1)$. Angenommen $\inf_l T_{N^1}^{\wedge} > 0$: Dann existiert f aus H mit $\langle f, T_{N^1}^{\wedge} f \rangle \geq 2c > 0$, l aus $\mathbb{N}$. Daher gibt es zu l, i aus $\mathbb{N}$ ein $j_{l,i}$ aus $\mathbb{N}$ mit $\langle f, T_{M_{ij}^1} f \rangle \geq c$ für $j \geq j_{l,i}$. Damit und mit (*) angewandt auf (M_{ij}^1) existieren i_n, j_n aus $\mathbb{N}$ zu n aus $\mathbb{N}$ derart, daß für $L_n := M_{i_n j_n}^1$ gilt: $m(L_n) = m^*(N^1 \Delta L_n \Delta N^1) \leq m^*(N^1) + m^*(L_n \Delta N^1) \leq 2/n$, während $\langle f, T_{L_n} f \rangle \geq c$. Dies ist jedoch im Widerspruch dazu, daß m ein Kontrollmaß zu T ist.

Klarerweise ist $T^{\wedge}/Q = T$. Insbesondere ist $T_X^{\wedge} = 1$. Zusammen mit b) und c) folgt daher - wie man sich leicht überlegt - daß $T^{\wedge}$ ein POV-Maß ist, das T fortsetzt.

d) Für jedes f aus H ist $M \mapsto \langle f, T_M f \rangle$ ein σ -additiver endlicher Inhalt auf Q , der nach [16; 5.7] eine eindeutige Fortsetzung auf $Q^{\wedge}$ besitzt. Diese ist damit gleich $N \mapsto \langle f, T_N^{\wedge} f \rangle$, woraus die Eindeutigkeit von $T^{\wedge}$ folgt.

Bemerkung. Seien T ein POV-Inhalt auf (X, Q) in einem separablen Hilbertraum H und (f_n) eine ONB von H . Dann ist - wie man (6.14) sich überlegt - $m, m(M) := \sum_n 2^{-n} \langle f_n, T_M f_n \rangle$, ein Kontrollinhalt zu T .

Sei $\overline{\mathbb{R}}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \text{ aus } \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, i=1, \dots, n\}$,
 $a \leq b : \iff a_i \leq b_i, i=1, \dots, n$, und $\langle a, b \rangle := \{x \text{ aus } \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, n\}$ der von den achsenparallelen Hyperflächen a_i und b_i begrenzten (rechts-halboffenen) Quader, a, b aus $\overline{\mathbb{R}}^n$. Die von allen Quadern erzeugte Algebra Q^n in $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen endlichen, disjunkten Vereinigungen von Quadern. Die von Q^n erzeugte σ -Algebra ist $B(\mathbb{R}^n)$.

Satz. Sei m ein endlicher Inhalt auf $(\mathbb{R}^n, Q^n)$, der translationsquasiinvariant ist, d.h. für den gilt: $\lim_j m(M_j) = 0 \iff$
 (6.15) $\lim_j m(x + M_j) = 0$ für jede Folge (M_j) aus Q^n und jedes x aus $\mathbb{R}^n$. Dann ist m σ -additiv.

Beweis. Sei $F: \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow [0, m(\mathbb{R}^n)]$, $F(a) := m(\{x \text{ aus } \mathbb{R}^n : x_i < a_i, i=1, \dots, n\})$ und $(a^1, a^2)_F := \sum_{i \in \{1, 2\}^n} (-1)^{i_1 + \dots + i_n} F(a_{i_1}^1, \dots, a_{i_n}^2)$,

a^1, a^2 aus $\overline{\mathbb{R}}^n$. Nach [27; I.(5.16)] ist $(a^1, a^2)_F = m(\langle a^1, a^2 \rangle)$. Sei $a^j \uparrow a$, a^j, a aus $\mathbb{R}^n$, j aus $\mathbb{N}$. Angenommen $0 < F(a) - \lim_j F(a^j)$, d.h. $\lim_j m(\langle a^j, a \rangle) > 0$. Dann ist $\lim_j m(\langle a^j + x, a + x \rangle) > 0$ für alle x aus

$\mathbb{R}^n$, insbesondere für $x = (r, \dots, r)$. Wegen der Überabzählbarkeit von $[0, 1]$ existiert $\varepsilon > 0$ und eine echt monoton wachsende Folge (r_k) aus $[0, 1]$ derart, daß $\lim_j m(\langle a^j + x^k, a + x^k \rangle) \geq \varepsilon$, $x^k := (r_k, \dots, r_k)$, k aus $\mathbb{N}$. Damit ist jedoch $m(\{x \text{ aus } \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < a_i + 1\}) = \infty$, Wid. Also ist F linksseitig stetig und damit nach [27; I.(5.25)] eine maßdefinierende Funktion, die nach [27; I.(5.27)] genau ein Maß m^* auf $B(\mathbb{R}^n)$ mit $m^*(\langle a, b \rangle) = (a, b)_F$, a, b aus $\mathbb{R}^n$ definiert. ■

Satz. Sei H ein separabler Hilbertraum, T ein POV-Inhalt auf $(\mathbb{R}^n, Q^n)$ in H und U_b aus $U(H)$ derart, daß $U_b T U_b^{-1} = T_{b+M}$, M aus Q^n , b aus $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau ein POV-Maß T^*
 (6.16) auf $(\mathbb{R}^n, B(\mathbb{R}^n))$ in H derart, daß $T^*/Q^n = T$; ist $S: B(\mathbb{R}^n) \rightarrow B(\mathbb{R}^n)$ ein Algebra-Homomorphismus mit $S(Q^n) \subset Q^n$ und U_S aus $U(H)$ derart, daß $U_S T U_S^{-1} = T_{S(M)}$, M aus Q^n , so gilt: $U_S T^* U_S^{-1} = T^*_{S(N)}$, N aus $B(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Da H separabel ist, besitzt T nach (6.14) einen Kontrollinhalt m . Wegen $U_b T U_b^{-1} = T_{b+M}$, M aus Q^n , b aus $\mathbb{R}^n$, ist m translationsinvariant. Damit ist m nach (6.15) σ -additiv, weshalb es nach

(6.13) genau ein POV-Maß $T^\wedge$ auf $B(\mathbb{R}^n)$ in H gibt mit $T^\wedge/Q^n = T$.
 Sei nun S und U_S wie in der Voraussetzung. Dann gilt: $m(M_i) \longrightarrow 0$
 $\iff m(S(M_i)) \longrightarrow 0$ für alle (M_i) aus Q^n . Sei N aus $B(\mathbb{R}^n)$,
 (M_{ij}) aus $W(N)$ und $(L_n) := (M_{i_n j_n})$ derart, daß $m(N \Delta L_n) \longrightarrow 0$ (vgl.
 Beweis zu (6.13), insbesondere (*)). Also ist auch $m(S(N) \Delta S(L_n))$
 $\longrightarrow 0$, womit man sich leicht überlegt, daß $(S(M_{ij}))$ aus $W(S(N))$.
 Hieraus folgt aufgrund der Definition von $T^\wedge$ (vgl. Beweis zu (6.16)):
 $T^\wedge_{S(N)} = \lim_i \lim_j T_{S(M_{ij})} = \lim_i \lim_j U_S T_{M_{ij}} U_S^{-1} = U_S T^\wedge_N U_S^{-1}$. ■

Bemerkung. Der Satz (6.16) wird für PV-Inhalte in [4; Anhang II] be-
 wiesen.

7 Einiges über unitäre Darstellungen der Drehgruppe, der euklidischen Gruppe, der euklidischen Gruppe mit Dilatationen und der Poincarégruppe

Dieses Kapitel ist rein mathematisch und enthält vornehmlich technische Details, die vor allem in Kap.3 zur expliziten Konstruktion der Lokalisierungen und in Kap.4 zur Berechnung der Ortsoperatoren benötigt werden. Dennoch haben wir versucht, den Stoff so zu gruppieren, daß die einzelnen Abschnitte für sich lesbar sind.

Unter einer Darstellung einer topologischen Gruppe verstehen wir hier stets eine (stark) stetige Hilbertdarstellung. IUD steht für irreduzible unitäre stetige Hilbertdarstellung. Ist G eine topologische Gruppe und G' eine Untergruppe von G , so bezeichnet $U_G^{(a,b,...)}$ eine unitäre stetige Darstellung von G und $U_{G'}^{(a,b,...)}$ ihre Einschränkung auf G' ; $a,b,...$ sind Klassifizierungsindizes. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wird anstelle von $U_G^{(a,b,...)}$ bzw. $U_{G'}^{(a,b,...)}$ der neutrale Buchstabe U verwendet. Ist X ein Hilbertraumisomorphismus, so bezeichnet XUX^{-1} die Darstellung $a \mapsto XU(a)X^{-1}$, a aus G . Im folgenden werden wir mehrmals das Induktionsverfahren für Darstellungen von MACKEY [22] anwenden, wovon eine kurze Zusammenfassung in [23] zu finden ist.

7.1 Einiges über die $SU(2)$. Die $SU(2)$ ist eine universelle Überlagerungsgruppe der Drehgruppe $SO(3)$ im euklidischen Raum. Sie besteht aus allen komplexen 2×2 - Matrizen der Form

$$(7.0) \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } B_{11} = B_{22}^*, \quad B_{12} = -B_{21}^*, \quad |B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 = 1.$$

Der Überlagerungshomomorphismus lautet

$$(7.1) \quad \wedge^*: SU(2) \longrightarrow SO(3), \quad \wedge^*(B)_{ab} := \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(\zeta_a B \zeta_b B^+) \quad \text{mit } a,b=1,2,3,$$

$$(7.2) \quad \zeta_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\wedge^*$ ist als Darstellung der $SU(2)$ irreduzibel und es ist

$$(7.3) \quad \operatorname{Ker} \wedge^* = \{1, -1\}.$$

Die Matrizen

$$C_{1,t} := \begin{pmatrix} \cos t/2 & i \sin t/2 \\ i \sin t/2 & \cos t/2 \end{pmatrix}, \quad C_{2,t} := \begin{pmatrix} \cos t/2 & \sin t/2 \\ -\sin t/2 & \cos t/2 \end{pmatrix},$$

$$C_{3,t} := \begin{pmatrix} \exp it/2 & & \\ & \exp -it/2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad D_3 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+i & 1+i \\ -1-i & -1-i \end{pmatrix}, \quad t \text{ aus } \mathbb{R},$$

werden mittels $\wedge^*$ auf die folgenden Drehungen abgebildet:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \wedge^*(C_{1,t}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \wedge^*(C_{2,t}) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \\ \wedge^*(C_{3,t}) &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \wedge^*(D_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mittels des Überlagerungshomomorphismus $\wedge^*$ operiert die Gruppe $SU(2)$ in kanonischer Weise auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$:

$$(7.5) \quad SU(2) \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (B, x) \longmapsto Bx := \wedge^*(B)x,$$

wobei $\wedge^*(B)x$ die gewöhnliche Matrizenmultiplikation der Drehmatrix $\wedge^*(B)$ mit dem dreikomponentigen Spaltenvektor x ist. Die Stabilitätsgruppe im Punkt 0 ist $SU(2)$ selbst, in einem Punkt $x \neq 0$ ist sie das Urbild bzgl. $\wedge^*$ aller Drehungen mit der Drehachse x . Die Bahnen sind der Ursprung selbst und die Sphären der Kugeln um den Ursprung. Die Stabilitätsgruppe im Punkt e_3 bezeichnen wir mit

$$(7.6) \quad SU(2)_3 = \{ C_{3,t} : t \text{ aus } [0, 4\pi[\}.$$

Die Bahn durch e_3 ist die Einheitssphäre S^2 , die daher mittels $w \longmapsto B_w$ $SU(2)_3$ mit $B_w e_3 = w$ homöomorph auf den Quotientenraum $SU(2)/SU(2)_3$ abgebildet wird. Diese Abbildung ist unabhängig von der speziellen Wahl von $w \longmapsto B_w$; wir werden jedoch stets den sog. Helizitätsquerschnitt verwenden:

$$(7.7) \quad \begin{aligned} B_w &:= B_\phi B_\theta B_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -e^{-i\phi} \sin \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \\ B_\phi &:= 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\phi} \\ -ie^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}, \quad B_\theta := \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}, \\ w &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{für } (\theta, \phi) \text{ aus } \{(0,0)\} \cup (]0,\pi[\times]0,2\pi[) \cup \{(\pi,0)\}. \end{aligned}$$

Zweckmäßig ist, allgemein $B_x := B_{x/|x|}$ für x aus $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $B_0 := 1$ zu definieren.

Aus (7.6) und (7.7) ergibt sich die folgende Parametrisierung der $SU(2)$:

$$(7.8) \quad S^2 \times [0, 4\pi] \longrightarrow SU(2), \quad (w, t) \longmapsto B_w C_3 t.$$

7.2 Die IUD der $SU(2)$. Die Darstellungstheorie der $SU(2)$ ist den Physikern wohlbekannt und wird in der Literatur vielfach abgehandelt, so daß wir uns hier kurz fassen können. Wir wählen im wesentlichen die Darstellung aus [24; S.125-142].

7.2.1 Eine Serie von Homomorphismen auf $M(2, \mathbb{C})$. Sei $j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ und V_j der $2j+1$ -dimensionale komplexe Vektorraum aller Polynome $p: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $p(z) = \sum_{i=0, \dots, 2j} a_i z^i$ mit a_i aus $\mathbb{C}$, versehen mit der punktweise erklärten Addition und skalaren Multiplikation. Eine Basis in V_j ist durch die Polynome p_m , $p_m(z) := ((j-m)!(j+m)!)^{-1/2} \cdot z^{j+m}$, $m=-j, -j+1, \dots, j-1, j$, gegeben. Bezüglich des durch die Wahl $\langle p_m, p_{m'} \rangle := \delta_{m, m'}$, $m, m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$, eindeutig bestimmten (im zweiten Argument linearen) Skalarprodukts $\langle, \rangle : V_j \times V_j \longrightarrow \mathbb{C}$, ist (p_m) eine Orthonormalbasis. Setze

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \tilde{D}^{(j)}: M(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \text{End}(V_j), \\ (\tilde{D}^{(j)}(M)p)(z) &:= \sum_{i=0, \dots, 2j} a_i (M_{12}z + M_{22})^{2j-i} (M_{11}z + M_{21})^i. \end{aligned}$$

Für z aus $\mathbb{C}$ mit $M_{12}z + M_{22} \neq 0$ ist $(\tilde{D}^{(j)}(M)p)(z) = (M_{12}z + M_{22})^{2j} \cdot p((M_{11}z + M_{21}) / (M_{12}z + M_{22}))$.

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \tilde{D}_{mm'}^{(j)}: M(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{D}_{mm'}^{(j)}(M) := \langle p_m, \tilde{D}^{(j)}(M)p_{m'} \rangle, \\ m, m' &= -j, -j+1, \dots, j-1, j. \end{aligned}$$

Dann gilt, wie man leicht verifiziert:

$$(7.11) \quad \tilde{D}^{(j)}(1) = \text{id}_{V_j};$$

$$(7.12) \quad \tilde{D}^{(j)}(MM') = \tilde{D}^{(j)}(M) \tilde{D}^{(j)}(M') \text{ für alle } M, M' \text{ aus } M(2, \mathbb{C});$$

$$\tilde{D}_{mm'}^{(j)}(M) = (((j-m)!(j+m)!)/((j-m')!(j+m')))^{1/2}.$$

$$(7.13) \quad \sum_{i=\max(0, m'-m)}^{\min(j-m, j+m')} \binom{j+m'}{i} \binom{j-m'}{j-m-i} M_{11}^{j+m'-i} M_{12}^{m-m'+i} M_{21}^i M_{22}^{j-m-i}$$

$$\text{mit } 0^0 := 1.$$

Mit Hilfe von (7.13) erhält man leicht:

$$(7.14) \quad \tilde{D}^{(j)}(M)^+ = \tilde{D}^{(j)}(M^+);$$

$$(7.15) \quad \tilde{D}^{(j)}(M)^* = \tilde{D}^{(j)}(M^*);$$

$$(7.16) \quad \tilde{D}^{(j)}(M)^T = \tilde{D}^{(j)}(M^T);$$

$$(7.17) \quad \tilde{D}_{mm'}^{(j)} \left(\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} \right) = M_{11}^{j+m} M_{22}^{j-m} \delta_{mm'};$$

$$(7.18) \quad \tilde{D}_{mm'}^{(j)} \left(\begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix} \right) = M_{12}^{j+m} M_{21}^{j-m} \delta_{m, -m'}.$$

Wir bezeichnen dabei, da keine Verwechslung möglich ist, mit $\tilde{D}^{(j)}(M)$ auch die Matrix $(\tilde{D}_{mm'}^{(j)}(M))_{m, m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j}$.

Für die totale Ableitung d von $\tilde{D}^{(j)}$ an der Stelle 1 schreiben wir kurz $d^j := (d\tilde{D}^{(j)})(1)$. Es ist $d^j M$ aus $\text{End}(V_j)$ für M aus $M(2, \mathbb{C})$; explizit erhält man mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Matrixelemente nach (7.13):

$$(7.19a) \quad \langle p_m, d^j M p_{m'} \rangle = \sum_{l, k=1}^2 d_{lk} \tilde{D}_{mm'}^{(j)}(1) M_{lk} = \\ (j+m) M_{11} \delta_{mm'} + ((j+m)(j-m+1))^{1/2} M_{12} \delta_{m, m'-1} + \\ ((j+m+1)(j-m))^{1/2} M_{21} \delta_{m, m'+1} + (j-m) M_{22} \delta_{mm'}.$$

Nach Definition der Ableitung gilt die Linearität

$$(7.19b) \quad d^j(M+aM') = d^j M + a d^j M', \quad M, M' \text{ aus } M(2, \mathbb{C}), \quad a \text{ aus } \mathbb{C}.$$

Sei A aus $GL(2, \mathbb{C})$. Dann ist $1_A, 1_A(M) := AMA^{-1}$, bzw. $1_A^j, 1_A^j(M) := \tilde{D}^{(j)}(A) M \tilde{D}^{(j)}(A^{-1})$, ein Algebraisomorphismus von $M(2, \mathbb{C})$ bzw. $M(2j+1, \mathbb{C})$ mit $1_A(1)=1$ bzw. $1_A^j(1)=1$. Wegen $\tilde{D}^{(j)} \circ 1_A = 1_A^j \circ \tilde{D}^{(j)}$ ist

$$(7.19c) \quad d^j(AMA^{-1}) = \tilde{D}^{(j)}(A) d^j M \tilde{D}^{(j)}(A^{-1}), \quad M \text{ aus } M(2, \mathbb{C}).$$

7.2.2 Die IUD der $SU(2)$. Aus den Homomorphismen $\tilde{D}^{(j)}$ gewinnt man durch Einschränkung die IUD der $SU(2)$. Aufgrund von (7.14) ist $\tilde{D}^{(j)}(SU(2)) \subset U(V_j)$. Wir setzen

$$(7.20) \quad D^{(j)}: SU(2) \longrightarrow U(V_j), \quad D^{(j)}(B) := \tilde{D}^{(j)}(B), \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

Nach [24; Th. (29.20), (29.27)] ist $D^{(j)}, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, ein vollständiges System paarweise inäquivalenter IUD von $SU(2)$. (Aufgrund der Kompaktheit von $SU(2)$ ist jede ihrer stetigen Darstellungen zu einer unitären Darstellung äquivalent.) Der Überlagerungshomomor-

phismus $\wedge^*$ aus (7.1) ist zu $D^{(1)}$ äquivalent. Analog zu (7.20) wird $D_{mm'}^{(j)}$ definiert (vgl. (7.10)). Für die Matrixelemente gelten folgende Symmetriebeziehungen:

$$(7.21) \quad D_{m'm}^{(j)}(B) = \begin{cases} \left(\frac{B_{21}}{B_{12}}\right)^{m-m'} D_{mm'}^{(j)}(B), & \text{für } B_{12} \neq 0 \\ D_{mm'}^{(j)}(B), & \text{für } B_{12} = 0 \end{cases};$$

$$(7.22) \quad D_{-m,-m'}^{(j)}(B) = (-1)^{m-m'} D_{mm'}^{(j)}(B)^*;$$

dabei folgt (7.21) aus (7.13) und (7.16), (7.22) aus (7.15), (7.18) und

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \text{ aus } SU(2).$$

Bekanntlich lassen sich die Matrixelemente $D_{mm'}^{(j)}(B)$ mit Hilfe der Jacobi-Polynome $P_n^{(a,b)}$ (vgl. [26; 10.8(12)1) ausdrücken. Wir benötigen dies explizit lediglich für den Fall $m=m'$. Wegen (7.22) genügt es den Fall $m \geq 0$ zu betrachten; (7.13) liefert nach kurzer Rechnung:

$$(7.23) \quad D_{mm}^{(j)}(B) = B_{11}^{2m} P_{j-m}^{(0,2m)}(2|B_{11}|^2 - 1), \quad m \geq 0.$$

Im Fall $B_{11}=0$ folgt daraus für die rechte Seite $(-1)^j \delta_{m0}$.

7.3 Die IUD der ISU(2). Die ISU(2) ist eine universelle Überlagerungsgruppe der euklidischen Gruppe ISO(3) und ein semidirektes Produkt von $\mathbb{R}^3$ mit SU(2). Gruppenverknüpfung, Einselement und Inverses lauten (vgl. (7.5)):

$$(7.24) \quad (b,B)(b',B') = (b+Bb', BB'), \quad (0,1), \quad (b,B)^{-1} = (-B^{-1}b, B^{-1}).$$

Der Überlagerungshomomorphismus ist $(b,B) \mapsto (b, \wedge^*(B))$. Zur Bestimmung der IUD der ISU(2) wenden wir das allgemeine Induktionsverfahren (vgl. [23; S.391) an. Wir schreiben im folgenden kurz $\mathbb{R}^3$ anstelle von $\mathbb{R}^3 \times \{1\}$ und SU(2) anstelle von $\{0\} \times SU(2)$.

1. $\mathbb{R}^3$ ist abelscher Normalteiler von ISU(2). Die IUD von $\mathbb{R}^3$ lauten: $U^{(s)}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow U(1)$, $U^{(s)}(x) := \exp(-isx)$ mit $sx := s_1x_1 + \dots + s_3x_3$, s aus $\mathbb{R}^3$. Über die Operation der ISU(2) auf der Menge der IUD von $\mathbb{R}^3$ erhält man die Operation $(b,B) \cdot s = Bs$ der ISU(2) auf $\mathbb{R}^3$ selbst.

2. $S_r^2 := \{s \text{ aus } \mathbb{R}^3 : |s|=r\}$, $r \geq 0$, sind die Bahnen und $S := \{re_3 : r \geq 0\}$ ist eine Borelmenge, die mit jeder Bahn genau einen Punkt gemeinsam hat.

3. Die Stabilitätsgruppen sind $ISU(2)_0 = ISU(2)$ und $ISU(2)_{re_3} = \mathbb{R}^3 \ltimes SU(2)_3$ (vgl. (7.6)) für $r > 0$, so daß für die kleinen Gruppen gilt: $ISU(2)_0 / \mathbb{R}^3 \cong SU(2)$, $ISU(2)_{re_3} / \mathbb{R}^3 \cong SU(2)_3 \cong U(1)$, $r > 0$. Die IUD der kleinen Gruppen erhält man re_3 für $r=0$ aus (7.20), für $r > 0$ aus den IUD der Torusgruppe $U(1)$. Einen vollständigen Satz paarweise inäquivalenter IUD von $U(1)$ bilden

$$(7.25) \quad U(1) \longrightarrow U(1), z \longmapsto z^{2m}, m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$$

4. Damit erhält man für $r=0$ aus den IUD der Stabilitätsgruppe sofort die IUD der $ISU(2)$; für $r > 0$ ist erst die Darstellung

$$ISU(2)_{re_3} \longrightarrow U(1), (b, c) \longmapsto \exp(-ib_3) c_{11}^{2m},$$

zu einer Darstellung der $ISU(2)$ zu induzieren. Nach einer geeigneten Äquivalenztransformation ergibt sich der folgende vollständige Satz paarweise inäquivalenter IUD der $ISU(2)$:

$$(7.26a) \quad U_{ISU(2)}^{(0,j)}, U: ISU(2) \longrightarrow U(2j+1), U(b, B) := D^{(j)}(B), j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots;$$

$$U_{ISU(2)}^{(r,m)}, U: ISU(2) \longrightarrow U(L^2(S_r^2, \mathbb{C})), r > 0, m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots,$$

$$(7.26b) \quad (U(b, B)f)(s) = e^{-ibs} k(s, B)^{2m} f(B^{-1}s), \text{ mit}$$

$$(7.27) \quad \begin{pmatrix} k(s, B) & 0 \\ 0 & k(s, B)^* \end{pmatrix} = B_s^{-1} B B_{B^{-1}s} \text{ aus } SU(2)_3 \text{ (vgl. (7.5, 6), (7.7ff.))},$$

$$(7.28) \quad k(s, B) = \frac{(|s|+s_3)B_{22}^* - (s_1 - is_2)B_{12}^*}{|(|s|+s_3)B_{22}^* - (s_1 - is_2)B_{12}^*|}, \quad s \text{ aus } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \\ B \text{ aus } SU(2).$$

(Die rechte Seite von (7.28) ist für verschwindenden Nenner durch stetige Ergänzung definiert.) Die L^2 -Räume beziehen sich auf das auf 1 normierte drehinvariante Maß auf S_r^2 .

7.4 Die Ausreduktion der Einschränkung der IUD der $ISU(2)$ auf die $SU(2)$. Die Darstellungen (7.26a) bleiben bei Einschränkung auf die $SU(2)$ offensichtlich irreduzibel. Dies ist jedoch nicht der Fall für die Darstellungen (7.26b). Sei

$$(7.29) \quad U_{SU(2)}^{(r,m)} := U_{ISU(2)}^{(r,m)} / SU(2), r > 0, m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$$

Mit Hilfe des Hilbertraumisomorphismus $X_r: L^2(S^2, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(S^2, \mathbb{C})$, $(X_r f)(w) := f(rw)$, erkennt man sofort: $U_{SU(2)}^{(r,m)} \cong U_{SU(2)}^{(1,m)}$, $r > 0$, weshalb man sich bei der Ausreduktion auf den Fall $r=1$ beschränken kann. Wir zeigen, daß die Funktionen

$$(7.30) \quad Y_{mm'}^{(j)}: S^2 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad Y_{mm'}^{(j)}(w) := (2j+1)^{1/2} D_{mm'}^{(j)}(B_w^{-1}), \text{ mit} \\ j-|m| \text{ aus } \mathbb{N}_0, \quad m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j,$$

eine orthonormale Reduktionsbasis für die Darstellung $U_{SU(2)}^{(1,m)}$, $m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ bilden. Nach (7.17) und (7.27) ist

$$(7.31) \quad D_{mm'}^{(j)}(B_w^{-1} B B_{B^{-1}w}) = k(w, B)^{2m} \delta_{mm'}, \quad w \text{ aus } S^2, B \text{ aus } SU(2).$$

Wegen $D^{(j)}(B_w^{-1} B B_{B^{-1}w}) D^{(j)}(B_{B^{-1}w}^{-1}) = D^{(j)}(B_w^{-1}) D^{(j)}(B)$, folgt aus (7.31) mit (7.26b) und (7.30) bei Betrachtung des (m, m') -Matrixelementes:

$$(7.32) \quad U_{SU(2)}^{(1,m)}(B) Y_{mm'}^{(j)} = \sum_{m''} D_{m''m}^{(j)}(B) Y_{mm''}^{(j)}.$$

Wir drücken dieses Ergebnis wie folgt aus: Sei p_m^j die orthogonale Projektion in $L^2(S^2, \mathbb{C})$ auf den von den Funktionen $Y_{mm'}^{(j)}$, $m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$, aufgespannten Unterraum V_m^j . Dann reduziert p_m^j die Darstellung $U_{SU(2)}^{(1,m)}$, wofür obige Funktionen eine Basis bilden, und die Reduktion ist äquivalent zu $D^{(j)}$. Es bleiben somit Orthonormiertheit und Vollständigkeit des Funktionensystems (7.30) zu zeigen. Nach dem Theorem von PETER und WEYL (vgl. [24; S.24]) bilden die Funktionen $(2j+1)^{1/2} D_{mm'}^{(j)}$, $j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, $m, m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j$, eine ONB von $L^2(SU(2), \mathbb{C})$ bzgl. des Haarmaßes auf $SU(2)$. Zu $m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ betrachten wir den abgeschlossenen Unterraum

$$H_m := \{ h \text{ aus } L^2(SU(2), \mathbb{C}) : h(BC) = C_{11}^{2m} h(B) \text{ für } B \text{ aus } SU(2), C \text{ aus } SU(2) \}.$$

Da $D_{m'm''}^{(j)}(BC) = C_{11}^{2m''} D_{m'm''}^{(j)}(B)$ nach (7.17), folgt für h aus H_m aus [18; (2.70c)] mit (7.8):

$$\begin{aligned} \langle h, D_{m'm''}^{(j)} \rangle &= \int_{SU(2)} h^*(B) D_{m'm''}^{(j)}(B) dB = \int_{SU(2)/SU(2)} d(BSU(2)) \int_{SU(2)} h^*(BC) D_{m'm''}^{(j)}(BC) dC \\ &= \int_{S^2} h^*(B_w) D_{m'm''}^{(j)}(B_w) (4\pi)^{-1} dw \int_{SU(2)} C_{11}^{-2m} C_{11}^{2m''} dC = \\ &= \delta_{mm''} \int_{S^2} h^*(B_w) D_{m'm''}^{(j)}(B_w) (4\pi)^{-1} dw, \end{aligned}$$

weshalb $(2j+1)^{1/2} D_{m'm}^{(j)}$, $j-|m|$ aus $\mathbb{N}_0$, $m'=-j, -j+1, \dots, j+1, j$, eine ONB von H_m ist. Die Abbildung $H_m \rightarrow L^2(S^2, \mathbb{C})$, $h \mapsto f$, $f(w) := h(B_w)$, ist linear, surjektiv - das Urbild zu f aus $L^2(S^2, \mathbb{C})$ ist h , $h(B) = C_{11}^{2m} f(w)$ mit $B = B_w C$ (vgl. (7.8)) - und normerhaltend, wie eine zu der eben ausgeführten Rechnung analoge Überlegung zeigt. Als Bild der ONB von H_m ist das Funktionensystem $w \mapsto (2j+1)^{1/2} D_{m'm}^{(j)}(B_w)$ und daher auch $w \mapsto (2j+1)^{1/2} D_{m'm}^{(j)*}(B_w) = Y_{mm'}^{(j)}(w)$, $j-|m|$ aus $\mathbb{N}_0$, $m'=-j, -j+1, \dots, j-1, j$, eine ONB von $L^2(S^2, \mathbb{C})$.

Insgesamt ist damit gezeigt:

$$(7.33) \quad U_{SU(2)}^{(1,m)} \cong \bigoplus_{j-|m| \in \mathbb{N}_0} D^{(j)}, \quad m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$$

Zuletzt bestimmen wir noch die Projektionsoperatoren p_m^j (vgl. (7.32)ff.) explizit. Wegen der Orthonormiertheit der $Y_{mm'}^{(j)}$ ist

$$p_m^j f = \sum_{m'} \langle Y_{mm'}^{(j)}, f \rangle Y_{mm'}^{(j)}, \quad f \text{ aus } L^2(S^2, \mathbb{C}).$$

Dies ergibt mit Hilfe von (7.30) und (7.14)

$$(7.34) \quad (p_m^j f)(w) = \frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} D_{mm}^{(j)}(B_w^{-1} B_{w'}) f(w') dw', \quad w \text{ aus } S^2.$$

7.5 Die Ausreduktion der von den IUD der $SU(2)$ induzierten Darstellungen der $ISU(2)$. Die von den IUD $D^{(j)}$ der $SU(2)$ (vgl. (7.20)) induzierten Darstellungen der $ISU(2)$ geben wir in der folgenden Form an:

$$(7.35) \quad \begin{aligned} D_{ISU(2)}^{(j)}: ISU(2) &\rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})), \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \\ D_{ISU(2)}^{(j)}(b, B)g(x) &:= D^{(j)}(B)g(B^{-1}(x-b)); \end{aligned}$$

das Maß auf $\mathbb{R}^3$ ist das Lebesguemaß.

Wir führen nun zwei Äquivalenztransformationen durch. Zunächst die Fouriertransformation:

$$(7.36) \quad \begin{aligned} \mathcal{F} \text{ aus } U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})), \quad (\mathcal{F}g)(s) &:= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-isx} g(x) dx \\ \text{für } g \text{ aus } L^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}) \cap L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}). \end{aligned}$$

Die fouriertransformierte Darstellung (7.35) lautet:

$$(7.37) \quad (\mathcal{F} D_{\text{ISU}(2)}^{(j)}(b, B) \mathcal{F}^{-1} f)(s) = e^{-ibs} D^{(j)}(B) f(B^{-1}s).$$

Als zweite Transformation wird eingeführt:

$$(7.38) \quad X \text{ aus } U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1})), \quad (Xf)(s) := D^{(j)}(B_s^{-1}) f(s).$$

Es ist

$$(7.39) \quad (X \mathcal{F} D_{\text{ISU}(2)}^{(j)}(b, B) \mathcal{F}^{-1} X^{-1} f)(s) = e^{-ibs} D^{(j)}(B_s^{-1} B B_{B^{-1}s}^{-1}) f(B^{-1}s),$$

weshalb aufgrund von (7.31)

$$(7.40) \quad D_{\text{ISU}(2)}^{(j)} \cong \bigoplus_m U_{\text{ISU}(2)}^{(m)} \quad \text{mit } m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

Dabei ist

$$(7.41) \quad U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}, \quad U: \text{ISU}(2) \longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})), \quad m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots, \\ (U(b, B)f)(s) := e^{-ibs} k(s, B)^{2m} f(B^{-1}s).$$

Da offenbar in kanonischer Weise

$$(7.42) \quad U_{\text{ISU}(2)}^{(m)} \cong \int_{\mathbb{R}_+} U_{\text{ISU}(2)}^{(r, m)} 4\pi r^2 dr,$$

ist damit die Ausreduktion von $D_{\text{ISU}(2)}^{(j)}$ vollständig durchgeführt.

7.6 Die Ausreduktion der Einschränkungen der induzierten Darstellungen der ISU(2) auf die SU(2). Wegen (7.40) genügt es, die Darstellungen

$$(7.43) \quad U_{\text{SU}(2)}^{(m)} := U_{\text{ISU}(2)}^{(m)} / \text{SU}(2), \quad m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots \quad (\text{vgl. (7.41)}),$$

zu studieren.

Wir identifizieren den Darstellungsraum $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ mit dem Tensorprodukt $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \otimes L^2(S^2, \mathbb{C})$. $\mathbb{R}_+$ trägt dabei als Maß das 4π -fache des Radialanteils des dreidimensionalen Lebesguemaßes, lax geschrieben: $4\pi r^2 dr$, S^2 das auf 1 normierte drehinvariante Maß der Einheitssphäre. Damit ist

$$(7.44) \quad U_{\text{SU}(2)}^{(m)} = 1 \otimes U_{\text{SU}(2)}^{(1, m)},$$

weshalb für die orthogonale Projektion $P_m^j = 1 \otimes p_m^j$ auf den Dar-

stellungsraum $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \otimes V_m^j$ der Primary-Komponente von $U_{SU(2)}^{(m)}$ zur IUD $D^{(j)}$, $j=|m|$ aus IN_0 , nach (7.34) gilt:

$$(7.45) \quad (P_m^j f)(s) = \frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} D_{mm}^{(j)}(B_s^{-1} B_{w'}) f(|s|w') dw',$$

s aus $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Die irreduziblen Unterräume zu $U_{SU(2)}^{(m)}$ sind alle von der Form $V \otimes V_m^j$, wobei V einen eindimensionalen Unterraum von $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ bezeichnet; eine orthonormale Reduktionsbasis einer irreduziblen Komponente ist daher durch

$$(7.46) \quad (R \otimes Y_{mm'}^{(j)})_{m'=-j, -j+1, \dots, j-1, j} \quad \text{mit } R \text{ aus } L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}), \|R\|=1,$$

gegeben.

Einen elementaren Beweis dafür skizzieren wir wie folgt. Jeder irreduzible Unterraum liegt in einem der Räume $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \otimes V_m^j$, weshalb er eine Basis (f_i) der Form $f_i = \sum_k R_{ik} \otimes Y_{mk}^{(j)}$, $i, k = -j, -j+1, \dots, j-1, j$, besitzt, die sich nach $D^{(j)}$ transformiert, d.h.

$$U_{SU(2)}^{(m)}(B)f_i = \sum_k D_{ki}^{(j)}(B)f_k = \sum_{k,l} (D_{ki}^{(j)}(B)R_{kl}) \otimes Y_{ml}^{(j)}; \text{ andererseits nach (7.44) und (7.32): } U_{SU(2)}^{(m)}(B)f_i = \sum_k R_{ik} \otimes U_{SU(2)}^{(1,m)}(B)Y_{mk}^{(j)} =$$

$$\sum_{k,l} (D_{lk}^{(j)}(B)R_{ik}) \otimes Y_{ml}^{(j)}. \text{ Daraus folgt: } 0 = \sum_l \left(\sum_k (D_{ki}^{(j)}(B)R_{kl} - D_{lk}^{(j)}(B)R_{ik}) \right) \otimes Y_{ml}^{(j)}, \text{ was aufgrund der Orthogonalität der } Y_{ml}^{(j)} \text{ eine}$$

Summe orthogonaler Funktionen ist; also ist $\sum_k D_{ki}^{(j)}(B)R_{kl} = \sum_k D_{lk}^{(j)}(B)R_{ik}$ für alle $i, l = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ und B aus $SU(2)$. Betrachtet man diese Gleichung an jedem Punkt r aus $\mathbb{R}_+$ - unter Berücksichtigung von nur endlich vielen Ausnahmемengen vom Maß Null -, so liefert das Schursche Lemma wegen der Irreduzibilität von $D^{(j)}$:

$$R_{il} = \delta_{il} R.$$

7.7 Die IUD der Dilatationsgruppe D. Die Dilatationsgruppe D ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_+$ der positiven reellen Zahlen. Aus den IUD der additiven Gruppe $\mathbb{R}$, $x \mapsto \exp ixv$, v aus $\mathbb{R}$, erhält man mit Hilfe des Gruppenisomorphismus $\ln$ den folgenden vollständigen Satz paarweise inäquivalenter IUD von D :

$$(7.47) \quad U_D^{(v)}, U: D \longrightarrow U(1), U(r) := e^{iv \ln(r)}, v \text{ aus } \mathbb{R}.$$

7.8 Die IUD der DSU(2). DSU(2) ist eine universelle Überlagerungsgruppe der Drehgruppe mit Dilatationen DSO(3). Sie ist das direkte Produkt $D \otimes SU(2)$, weshalb

$$(7.48) \quad U_{DSU(2)}^{(v,j)}, U: DSU(2) \longrightarrow U(2j+1), U(rB) := e^{iv \ln(r)} D^{(j)}(B), \\ v \text{ aus } \mathbb{R}, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots,$$

ein vollständiger Satz paarweise inäquivalenter IUD von DSU(2) ist.

7.9 Die IUD der IDSU(2). IDSU(2) ist eine universelle Überlagerungsgruppe der euklidischen Gruppe mit Dilatationen IDSO(3). Ihre Struktur ist $\mathbb{R}^3 \otimes DSU(2)$ mit der Gruppenverknüpfung, dem Einselement und dem Inversen:

$$(b, rB)(b', r'B') = (b+rBb', rr'BB'), (o, 1), (b, rB)^{-1} = (-r^{-1}B^{-1}b, r^{-1}B^{-1}).$$

Die Bestimmung der IUD der IDSU(2) erfolgt analog zu denen der ISU(2) (vgl. 7.3). Wir fassen uns daher kurz.

1. Die Operation von IDSU(2) auf $\mathbb{R}^3$ lautet: $(b, rB) \cdot s = r^{-1}Bs$.
2. Die Bahnen sind $\{o\}$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$, $\{o, e_3\}$ ist eine Repräsentantenmenge.
3. Die Stabilitätsgruppen sind IDSU(2) bzw. $\mathbb{R}^3 \otimes SU(2)_3$, so daß die kleinen Gruppen äquivalent sind zu DSU(2) bzw. $SU(2)_3 \cong U(1)$. Die IUD der kleinen Gruppen sind daher durch (7.48) bzw. (7.25) gegeben.
4. Es bleibt die Darstellung $\mathbb{R}^3 \otimes SU(2)_3 \longrightarrow U(1)$, $(b, C) \longmapsto \exp(-irb_3) C_{11}^{2m}$, zu einer Darstellung der IDSU(2) zu induzieren. Nach einer geeigneten Äquivalenztransformation ergibt sich der folgende vollständige Satz paarweise inäquivalenter IUD der IDSU(2):

$$(7.49a) \quad U_{IDSU(2)}^{(v,j)}, U: IDSU(2) \longrightarrow U(2j+1), U(b, rB) := e^{iv \ln(r)} D^{(j)}(B) \\ v \text{ aus } \mathbb{R}, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots;$$

$$(7.49b) \quad U_{IDSU(2)}^{(m)}, U: IDSU(2) \longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})), m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots, \\ (U(b, rB)f)(s) = r^{3/2} e^{-ibs} k(s, B)^{2m} f(rB^{-1}s);$$

dabei ist das Maß auf $\mathbb{R}^3$ das Lebesguemaß und $k(s, B)$ in (7.27) definiert.

7.10 Die Ausreduktion der von den IUD der DSU(2) induzierten Darstellungen der IDSU(2). Wir geben die von den IUD der DSU(2) induzierten Darstellungen der IDSU(2) in der folgenden Form an:

$$(7.50) \quad \begin{aligned} D_{IDSU(2)}^{(v,j)}: IDSU(2) &\longrightarrow U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}), v \text{ aus } \mathbb{R}, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \\ (D_{IDSU(2)}^{(v,j)}(b, rB)g)(x) &:= r^{-3/2} e^{iv \ln(r)} D^{(j)}(B)g(r^{-1}B^{-1}(x-b)); \end{aligned}$$

das Maß auf $\mathbb{R}^3$ ist das Lebesguemaß.

Wir führen zunächst die Äquivalenztransformationen (7.36), (7.38) aus:

$$(7.51) \quad (X \mathcal{F} D_{IDSU(2)}^{(v,j)}(b, rB) \mathcal{F}^{-1} X^{-1} f)(s) = r^{3/2} e^{iv \ln(r)} e^{-ibs} \cdot D^{(j)}(B_s^{-1} B_{B^{-1}s}) f(rB^{-1}s).$$

$$\text{Da } U_{IDSU(2)}^{(v,o,m)} := U_{IDSU(2)}^{(v,o)} U_{IDSU(2)}^{(m)} = X_v^{-1} U_{IDSU(2)}^{(m)} X_v \quad \text{mit}$$

$$(7.52) \quad X_v \text{ aus } U(L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})), (X_v f)(s) := \exp(iv \ln(|s|)) f(s), s \neq 0,$$

ist aufgrund von (7.31) für alle v aus $\mathbb{R}$ und $j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

$$(7.53) \quad D_{IDSU(2)}^{(v,j)} \cong \bigoplus_m U_{IDSU(2)}^{(m)} \quad \text{mit } m=-j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

7.11 Einiges über die $SL(2, \mathbb{C})$. Die $SL(2, \mathbb{C})$ ist eine universelle Überlagerungsgruppe der eigentlich orthochronen Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$. Sie besteht aus allen komplexen 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Damit ist $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$. Der Überlagerungshomomorphismus lautet

$$(7.54) \quad \wedge: SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow L_+^\uparrow, \quad \wedge(A)_{\alpha\beta} := \frac{1}{2} \text{Sp}(\tilde{\epsilon}_\alpha A \tilde{\epsilon}_\beta A^+), \quad \alpha, \beta=0, 1, 2, 3,$$

mit $\tilde{\epsilon}_0 := 1$, $\tilde{\epsilon}_a, a=1, 2, 3$ wie in (7.2). Der Vergleich mit (7.1) zeigt:

$$(7.55) \quad \wedge(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \wedge^*(B) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{für alle } B \text{ aus } SU(2).$$

$\wedge$ ist als Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$ irreduzibel und es ist $\text{Ker } \wedge = \{1, -1\}$.

Die Matrizen

$$A_{1,t} := 2^{-1/2} \begin{pmatrix} (\text{ch } t + 1)^{1/2} & \text{sgn } t (\text{ch } t - 1)^{1/2} \\ \text{sgn } t (\text{ch } t - 1)^{1/2} & (\text{ch } t + 1)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$A_{2,t} := 2^{-1/2} \begin{pmatrix} (\text{ch } t + 1)^{1/2} & -i \operatorname{sgn} t (\text{ch } t - 1)^{1/2} \\ i \operatorname{sgn} t (\text{ch } t - 1)^{1/2} & (\text{ch } t + 1)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$A_{3,t} := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},$$

t aus $\mathbb{R}$, werden mittels $\wedge$ auf die folgenden reinen Geschwindigkeitstransformationen abgebildet:

$$(7.56) \quad \wedge(A_{1,t}) = \begin{pmatrix} \text{ch } t & \text{sh } t & 0 & 0 \\ \text{sh } t & \text{ch } t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \wedge(A_{2,t}) = \begin{pmatrix} \text{ch } t & 0 & \text{sh } t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sh } t & 0 & \text{ch } t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\wedge(A_{3,t}) = \begin{pmatrix} \text{ch } t & 0 & 0 & \text{sh } t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh } t & 0 & 0 & \text{ch } t \end{pmatrix}.$$

Mittels des Überlagerungshomomorphismus $\wedge$ operiert die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ auf dem Minkowski-Raum, d.i. der $\mathbb{R}^4$ versehen mit der symmetrischen Bilinearform $(p, p') \mapsto pp' := p_0 p'_0 - p_1 p'_1 - p_2 p'_2 - p_3 p'_3$, in kanonischer Weise:

$$(7.57) \quad SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (A, p) \longmapsto Ap := \wedge(A)p;$$

dabei ist $\wedge(A)p$ die gewöhnliche Matrizenmultiplikation der eigentlich orthochronen Lorentzmatrix $\wedge(A)$ mit dem vierkomponentigen Spaltenvektor p . Die Bahnen dieser Operation sind charakterisiert durch die Konstante (längs einer Bahn) $u := pp$ und im Fall $u \neq 0$ durch die weitere Konstante (längs einer Bahn) $\operatorname{sgn} p_0$. Wir wählen folgende Boreslmenge S , die mit jeder Bahn genau einen Punkt gemeinsam hat:

$$S = S_+^+ \cup S_-^+ \cup S_-^- \cup S_+^0 \cup S_-^0, \quad \text{mit}$$

$$S_{\pm}^{\pm} := \{ \pm \mu e_0 : \mu > 0 \}, \quad S_-^- := \{ \nu e_3 : \nu > 0 \}, \quad S_{\pm}^0 := \{ \pm (e_0 + e_3) \}, \quad S_0^0 := \{ 0 \}$$

wobei e_{α} , $\alpha=0,1,2,3$, die kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

Der Reihe nach sei für $\mu, \nu > 0$

$$(7.58) \quad 0_{\pm}^{\mu} := 0_{\pm}^{\mu}, \quad 0_{\pm}^{\nu}, \quad 0^0 := 0_+^0, \quad 0_-^0, \quad 0_0^0$$

die Bahn durch den Punkt

$$\mu e_0, -\mu e_0, \nu e_3, (e_0 + e_3), -(e_0 + e_3), 0,$$

(7.58) versehen mit dem lorentzinvarianten Maß

$$X \mapsto \int_{\text{pr } X} (2|p_0|)^{-1} d^3s, \quad X \text{ eine Borelmenge der Bahn,}$$

wobei pr die Projektion des $\mathbb{R}^4$ auf den $\mathbb{R}^3$ bezeichnet und mit $|p_0|$ die Funktion $s \mapsto (u + |s|^2)^{1/2}$ auf dem $\mathbb{R}^3$ gemeint ist.

Die Stabilitätsgruppe $SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}}$ im Punkt $\hat{p}$ aus S lautet:

$$\begin{aligned} \hat{p} \text{ aus } S_+^+ \cup S_-^+ &: SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}} = SU(2), \\ \hat{p} \text{ aus } S_- &: SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}} = SU(1, 1), \\ \hat{p} \text{ aus } S_+^0 \cup S_-^0 &: SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}} = E(2), \\ \hat{p} \text{ aus } S_0^0 &: SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}} = SL(2, \mathbb{C}). \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$(A \text{ aus } SU(1, 1) \text{ bzw. } E(2)) \iff \det A = 1, A_{22} = A_{11}^* \text{ und } A_{21} = A_{12}^* \text{ bzw. } A_{21} = 0)$$

Die Bahn $O_{\hat{p}}$ durch den Punkt $\hat{p}$ ist mittels der Abbildung $p \mapsto A_p SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}}$ mit $A_p \hat{p} = p$ homöomorph zu dem Quotientenraum der $SL(2, \mathbb{C})$ nach der Stabilitätsgruppe $SL(2, \mathbb{C})_{\hat{p}}$ in $\hat{p}$. Diese Abbildung ist unabhängig von der speziellen Wahl des Querschnitts $p \mapsto A_p$; wir werden jedoch für $\hat{p}$ aus $S \setminus \{o\}$ stets den sog. Helizitätsquerschnitt verwenden:

$$A_p := B_w A_v \quad \text{mit } B_w \text{ aus (7.7), } A_v := A_{j,v} \text{ aus (7.55) ff.}$$

in der Parametrisierung

$$\begin{aligned} (7.60) \quad p &= \pm \mu \begin{pmatrix} \text{ch } v \\ w \text{ sh } v \end{pmatrix}, \quad (w, v) \text{ aus } S^2 \times \mathbb{R}_+ \cup \{(e_3, 0)\} \text{ für } p \text{ aus } O_{\pm}^{\mu}, \\ p &= \nu \begin{pmatrix} \text{sh } v \\ w \text{ ch } v \end{pmatrix}, \quad (w, v) \text{ aus } S^2 \times \mathbb{R} \quad \text{für } p \text{ aus } O_{\pm}^{\nu}, \\ p &= \pm e^v \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}, \quad (w, v) \text{ aus } S^2 \times \mathbb{R} \quad \text{für } p \text{ aus } O_{\pm}^0. \end{aligned}$$

7.12 Die IUD von $\tilde{P}$ zu reeller Masse und diskretem Spin und die Ausreduktion ihrer Einschränkungen auf die ISU(2). $\tilde{P}$ ist eine universelle Überlagerungsgruppe der Poincarégruppe $P = IL_{+}^{\uparrow}$, d.i. die inhomogene $IL_{+}^{\uparrow}$. Sie ist ein semidirektes Produkt von $\mathbb{R}_{+}^4$ mit $SL(2, \mathbb{C})$. Gruppenverknüpfung, Einselement und Inverses lauten:

$$(7.61) \quad (a,A)(a',A') = (a+AA', AA'), \quad (o,1), \quad (a,A)^{-1} = (-A^{-1}a, A^{-1}),$$

(vgl. (7.57)). Der Überlagerungshomomorphismus ist durch $(a,A) \mapsto (a, \wedge(A))$ gegeben. Die IUD von $\tilde{P}$ sind wohlbekannt und in der Literatur vielfach abgehandelt (s. z.B. [28; Chap. 11]). Dabei interessieren uns lediglich die sog. physikalischen Darstellungen, die wir - bis auf unitäre-antiunitäre Äquivalenz vollständig und paarweise inäquivalent - in der folgenden Form angeben:

$$(7.62a) \quad U_P^{(\mu,j)}, \quad U: \tilde{P} \longrightarrow U(L^2(O^\mu, \mathbb{C}^{2j+1})), \quad \mu > 0, \quad j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots,$$

$$(U(a,A)F)(p) := e^{ipa} D^{(j)}(A_p^{-1} A A_p^{-1}) F(A_p^{-1} p);$$

$$(7.62b) \quad U_P^{(o,m)}, \quad U: \tilde{P} \longrightarrow U(L^2(O^o, \mathbb{C})), \quad m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots,$$

$$(U(a,A)F)(p) := e^{iap} k(p,A)^{2m} F(A_p^{-1} p), \quad \text{mit}$$

$$k(p,A) := (A_p^{-1} A A_p^{-1})_{11} = \frac{(|p_1+p_3|A_{22}^* - (p_1-ip_2)A_{12}^*)}{|(|p_1+p_3|A_{22}^* - (p_1-ip_2)A_{12}^*)|}.$$

Vgl. dabei (7.20), (7.57), (7.58), (7.60) und (7.28)ff. .

7.12.1 Die Ausreduktion von $\tilde{P}^{U(\mu,j)}_{ISU(2)} := U_P^{(\mu,j)}/ISU(2)$, $\mu > 0, j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

Wir führen den folgenden Hilbertraumisomorphismus ein:

$$(7.63) \quad X_\mu: L^2(O^\mu, \mathbb{C}^{2j+1}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2j+1}), \quad \mu > 0 \text{ und } \mu=0,$$

$$(X_\mu F)(s) := (2p_o)^{-1/2} F\left(\begin{pmatrix} p_o \\ s \end{pmatrix}\right) \quad \text{mit } s \neq 0 \text{ für } \mu=0;$$

das Maß auf $\mathbb{R}^3$ ist das Lebesguemaß und $p_o = (\mu^2 + |s|^2)^{1/2}$. Für die mittels X_μ transformierte Darstellung $\tilde{P}^{U(\mu,j)}_{ISU(2)}$ hat man den Ausdruck $A_p^{-1} B A_{B^{-1}p}$ mit B aus $SU(2)$, pr $p=s$, zu betrachten. Wegen $(B^{-1}p)_o = p_o$ und pr $B^{-1}p = B^{-1}s$ ist nach (7.60), (7.7ff.) und (7.27): $A_p^{-1} B A_{B^{-1}p} = A_v^{-1} B_s^{-1} B B_{B^{-1}s} A_v = B_s^{-1} B B_{B^{-1}s}$. Damit rechnet man leicht nach:

$$(7.64) \quad X_\mu \tilde{P}^{U(\mu,j)}_{ISU(2)} X_\mu^{-1} = X \mathcal{F}^{D(j)}_{ISU(2)} \mathcal{F}^{-1} X^{-1} = \bigoplus_{m=-j}^j U^{(m)}_{ISU(2)},$$

(vgl. (7.39-41)).

Damit ergibt sich aus (7.42) die vollständige Ausreduktion von $\tilde{P}^{U(\mu,j)}_{ISU(2)}$.

7.12.2 Die Ausreduktion von $\tilde{P}_{\text{ISU}(2)}^{(0,m)} := U_{\tilde{P}}^{(0,m)} / \text{ISU}(2), m=0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$

Wir transformieren $\tilde{P}_{\text{ISU}(2)}^{(0,m)}$ mit X_o aus (7.63) für den Fall $j=0$.

(7.63)ff. entsprechend, ist $\Lambda_p^{-1} B A_{B-1p} = B_s^{-1} B B_{B-1s}$ für $p_o = |s|$,
 pr $p = s$, weshalb

$$(7.65) \quad X_o \tilde{P}_{\text{ISU}(2)}^{(0,m)} X_o^{-1} = U_{\text{ISU}(2)}^{(m)}.$$

Damit ergibt sich aus (7.42) die vollständige Ausreduktion von
 $\tilde{P}_{\text{ISU}(2)}^{(0,m)}$.

8 Schlußbemerkung

Wir haben versucht, plausibel zu begründen, warum wir das in Kap.2 definierte Lokalisierungskonzept eingeführt haben. Die dazu entwickelte Modellvorstellung, wonach die Substanz eines physikalischen Systems im Raum verteilt ist, ist jedoch - wie wir betonen - keine notwendige Voraussetzung für die Interpretierbarkeit der Lokalisierungsoperatoren. Sie ist lediglich eine Möglichkeit, die dem Begriff der Lokalisierbarkeit zugrunde liegenden Annahmen über ein physikalisches System modellmäßig zu erfassen. In mehreren wichtigen Punkten haben wir nachgewiesen, daß die hier gewählte mathematische Beschreibung diesen Vorstellungen angemessen ist. Sie nimmt einen Teil der Idealisierungen früherer Lokalisierungskonzepte zurück und erlaubt damit die Lokalisierung masseloser Elementarsysteme.

Es ist klar, daß die Untersuchungen im Zusammenhang mit dem von uns eingeführten Lokalisierungskonzept nicht abgeschlossen sind. Insbesondere wollen wir zwei Punkte für ein künftiges Programm hervorheben:

- a Lokalisierung und Kausalität,
- b Lokalisierung und Teilchenenergie.

Wie in [12] nachgewiesen, verhalten sich strikt lokalisierte Zustände relativistischer Elementarsysteme nicht kausal: Strikte Lokalisierung des Systems in einem beschränkten Raumgebiet kann nicht während eines noch so kurzen Zeitintervalls bestehen. Diese Schwierigkeit der Akausalität tritt bei uns - zumindest in dieser Form - nicht auf, da wir von vornherein einen Lokalisierungsgrad definiert haben, der zwischen 0 und 1 liegen kann. Eine Untersuchung der Kausalität im Zusammenhang mit Lokalisierung muß also die zeitliche Entwicklung des Lokalisierungsgrades diskutieren.

Der zweite Punkt betrifft die Frage nach der räumlichen Verteilung der Energie für lokalisierte Zustände. Das Ausgreifen der Energie eines in einem endlichen Raumgebiet (nahezu) lokalisierten Teilchens in den Raum erklärt die Möglichkeit einer Wechselwirkung mit anderen räumlich getrennten Teilchen. Das Problem ist hier, wie im Fall der Lokalisierbarkeit, welche mathematische Größe als die räumliche Verteilung der Teilchenenergie anzusehen ist.

In diesem Zusammenhang ist eine Lokalisierung eine euklidisch kovariante Zerlegung des Teilchenzahloperators (der im Fall elementarer Systeme gleich dem Einsoperator ist). Zur Lokalisierung der Energie - die auch eine euklidisch invariante Größe ist - liegt ebenfalls die Konstruktion einer euklidisch kovarianten Zerlegung des Energieoperators nahe. Aufgrund solcher Überlegungen scheint es lohnend, der Idee eines allgemeinen Prinzips zur Lokalisierung euklidisch invarianter Observablen nachzugehen.

Nach Fertigstellung der Arbeit erhielten wir ein Preprint von KRAUS [35]. Darin wird das Problem der Lokalisierung des zweikomponentigen Photons behandelt, und zwar mit dem gleichen mathematischen Konzept wie wir: Auch dort ist das euklidisch kovariante POV-Maß der zentrale Begriff. Unterschiede zu unserer Behandlung des zweikomponentigen Photons ergeben sich durch eine andere Wichtung bzw. Auswahl der Details. (So wird z.B. in [35] Wert auf die Ableitung der Unschärferelation für Ort und Impuls des Photons gelegt, während wir interessiert waren an der Darstellung der Ortsoperatoren durch Erzeugendenelemente der Liealgebra der Poincarégruppe.) Es besteht jedoch auch ein grundlegender Unterschied: Wir begründen die Einführung der POV-Lokalisierungen im Rahmen der gewöhnlichen Quantenmechanik (für eine Axiomatisierung vgl. etwa J.v.NEUMANN oder J.M.JAUCH); wesentlich hierfür ist der Begriff des Lokalisierungsgrades und das Substanzmodell. Die Begründung bei KRAUS hingegen erfolgt im Rahmen der axiomatischen Neuformulierung der Quantenmechanik durch G.LUDWIG.

Liste der verwendeten Symbole

$\setminus$	Mengenminus
Δ	symmetrische Differenz (zweier Mengen)
$\uparrow$ ($\downarrow$)	aufsteigende (absteigende) Folge (von Mengen)
$\complement$	Komplement (einer Menge)
id_M	identische Abbildung auf der Menge M
1_M	charakteristische Funktion der Menge M
f/M	Einschränkung der Funktion f auf die Teilmenge M des Definitionsbereichs
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$,	natürliche Zahlen, natürliche Zahlen mit Null,
$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$	ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen,
$B(\mathbb{R}^3)$	positive reelle Zahlen, komplexe Zahlen
EK	Borelmengen des $\mathbb{R}^3$, s. auch S.49
S_r^2 bzw. S^2	Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung
dw	Sphäre im $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung mit Radius r bzw. 1
xx'	das auf 4π normierte drehinvariante Maß der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$
$ x $	$=x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3$ für x, x' aus $\mathbb{R}^3$
$\angle(s, s')$	$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$ für x aus $\mathbb{R}^3$
$\langle a, b \rangle$	Winkel zwischen s und s' für s, s' aus $\mathbb{R}^3$
e_3	s.S.64 oben
$\nabla=(\partial_k)$, $\nabla^*=(\partial_k^*)$..	$=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$
$P=\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$..	$\nabla=(\partial_k)$, $\nabla^*=(\partial_k^*)$.. s. S.44 oben
pp'	Element aus $\mathbb{R}^4$
$\text{pr}:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$	$=p_0p'_0-p_1p'_1-p_2p'_2-p_3p'_3$ für p, p' aus $\mathbb{R}^4$
sh , ch	$\text{pr } p = p$
sgn	Hyperbelsinus, Hyperbelcosinus
$P_n^{(a,b)}$	Signum
$Y_{mm}^{(j)}$	Jacobi-Polynom, s. [26;10.8(12)]
$\tilde{D}^{(j)}$, $\tilde{D}_{mm}^{(j)}$, $D^{(j)}$..	s. (7.30)
$D_{mm}^{(j)}$	s. der Reihe nach: (7.9), (7.10), (7.2off.)

B_w, B_x	s.(7.7ff.)
A_p	s.(7.6o)
$\wedge^\circ$	s.(7.1)
$\wedge$	s.(7.55)
$Bx = \wedge^\circ(B)x$	B aus $SU(2)$, x aus $\mathbb{R}^3$
$Ap = \wedge(A)p$	A aus $SL(2, \mathbb{C})$, p aus $\mathbb{R}^4$
$k(s, B)$	s.(7.28)
$k(p, A)$	s.(7.62b)
$\mathcal{G}_i, i=1,2,3$	s.(7.2)
$C_{i,t}, i=1,2,3, D_3 \dots$	s.(7.3)ff.
$A_{i,t}, i=1,2,3$	s.(7.55)ff.
z^*	das Konjugiert-Komplexe von z aus $\mathbb{C}$
$SU(2), SU(2)_3, ISU(2),$ $D, DSU(2), IDSU(2),$ $SL(2, \mathbb{C}), \tilde{P}$	s. der Reihe nach (7.o), (7.6), (7.24), 7.7, 7.8, 7.9, 7.11, 7.12
$M(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{C}), U(n)$.	Menge der $n \times n$ -Matrizen, der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen, der unitären $n \times n$ -Matrizen
$End(V), GL(V)$	Menge der Endomorphismen, der Automorphismen von V in V , V Vektorraum
1	Einheitsmatrix, Einheitsoperator
M^*, M^T, M^+	die konjugiert-komplexe, die transponierte, die adjungierte Matrix M
$\langle, \rangle$	im zweiten Argument lineares Skalarprodukt
$\ \ $	Norm
ONB	Orthonormalbasis
Ker	Kern einer linearen Abbildung
$\perp$	Orthogonalität zweier Vektoren, zweier Un- terräume, zweier Projektoren oder - falls hochgestellt - das orthogonale Komplement
span	lineare Hülle
$\overline{\text{span}}$	abgeschlossene lineare Hülle
$\oplus$	direkte Summe von Hilberträumen oder von Operatoren oder von Gruppen
$\otimes$	Tensorprodukt von Hilberträumen oder von Vektoren
$\ltimes$	semidirektes Produkt von Gruppen - links steht der Normalteiler
$\times$	Kreuzprodukt (von Dreiervektoren)

$L^2(X, H) = L_m^2(X, H)$	Hilbertraum der Äquivalenzklassen quadrat-integrierbarer Funktionen auf dem Maßraum X (mit Maß m) in dem Hilbertraum H
$U(H)$	Menge der unitären Operatoren auf dem Hilbertraum H
$[,]$	Kommutator (von Operatoren)
T, E	POV-Maß, PV-Maß (s.(6.1ff.))
$\mathcal{F}, X, X_V, X_\mu$	s. der Reihe nach (7.36), (7.38), (7.52), (7.63)
$(U_{\mathcal{P}}, T), (U_{\mathcal{P}}, E)$	Lokalisierung (s.(2.1))
$IUD, XUX^{-1}, U_G^{(a,b,...)},$ $G, U_G^{(a,b,...)}$	s. S.66
$\cong$	Äquivalenz zweier Darstellungen, Isomorphie von Hilberträumen
$\bigoplus \int_R U^{(r)} dr$	direktes Integral der Darstellungen $U^{(r)}$
μ	Masse
j	Spin
m	Helizität oder Spinkomponente
δ_{kl}	Kroneckersymbol
ε_{klm}	vollständig antisymmetrischer Tensor dritter Stufe
WM	Wahrscheinlichkeitsmaß
Ia, AI	s.(3.1ff.)
■	Ende eines Beweises

Literaturverzeichnis

- 1 KALNAY, A.J.: The Localization Problem; Studies in the Foundations, Methodology and Philosophy of Science 4, 93-110(1971)
- 2 KALNAY, A.J., TORRES, P.L.: Spin and Localization for Elementary Systems; Phys.Rev.D 9, 1670-1674(1974)
- 3 NEWTON, T.D., WIGNER, E.P.: Localized States for Elementary Systems; Rev.Mod.Phys. 21, 400-406(1949)
- 4 WIGHTMAN, A.S.: On the Localizability of Quantum Mechanical Systems; Rev.Mod.Phys. 34, 845-872(1962)
- 5 MACKEY, G.W.: Infinite-Dimensional Group Representations, 10; Bull.Am.Math.Soc. 69, 628-686(1963)
- 6 JAUCH, J.M., PIRON, C.: Generalized Localizability; Helv.Phys.Acta 40, 559-570(1967)
- 7 AMREIN, W.O.: Localizability for Particles of Mass Zero; Helv. Phys. Acta 42, 149-190(1969)
- 8 FLEMING, G.N.: Covariant Position Operators, Spin, and Locality; Phys.Rev.B 137, 188-197(1964)
- 9 FLEMING, G.N.: A Manifestly Covariant Description of Arbitrary Dynamical Variables in Relativistic Quantum Mechanics; J.Math.Phys. 7, 1959-1981(1966)
- 10 HOUTAPPEL, R.M.F., VAN DAM, H., WIGNER, E.P.: The Conceptual Base and Use of the Geometric Invariance Principles; Rev.Mod.Phys. 37, 595-632(1965)
- 11 GALINDO, A.: Massless Particles with Definite Helicity are not Weakly Localizable; Helv.Phys. Acta 41, 257-260(1968)
- 12 HEGERFELDT, G.C.: Remark on Causality and Particle Localization; Phys.Rev.D 10, 3320-3321(1974)
- 13 JADCZYK, A.Z., JANCEWICZ, B.: Maximal Localizability of Photons; Bull.Acad.Pol.Sci.Ser.Sci.Math.Astron.&Phys. 21, 477-484(1973)
- 14 RIESZ, F., SZ.-NAGY, B.: Vorlesungen über Funktionalanalysis; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
- 15 PARTHASARATHY, K.R.: Probability Measures on Metric Spaces; Academic Press, New York and London 1967

- 16 BAUER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie; Walter de Gruyter & Co, Berlin 1968
- 17 GAAL, S.A.: Linear Analysis and Representation Theory; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1973
- 18 MEISTER, H.J.: Einführung in die Theorie der topologischen und Lie-Gruppen (Vorlesungsausarbeitung); Sektion Physik der Universität München 1972
- 19 HEWITT, E., STROMBERG, K.: Real and Abstract Analysis; Springer-Verlag, New York 1969
- 20 MACKEY, G.W.: Imprimitivity for Representations of Locally Compact Groups; Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 35, 537-545(1949)
- 21 LOOMIS, L.H.: Positive Definite Functions and Induced Representations; Duke Math.J. 27, 569-579(1960)
- 22 MACKEY, G.W.: Induced Representations of Locally Compact Groups I; Ann. of Math. 55, 101-139(1952)
Induced Representations of Locally Compact Groups II; Ann. of Math. 58, 193-221(1953)
Unitary Representations of Group Extension I; Acta Math. 99, 265-311(1958)
- 23 BRENNICH, H.: Die Induktion von Gruppendarstellungen und ihre Anwendung auf die inhomogene Galilei-Gruppe (Diplomarbeit); Sektion Physik der Universität München 1968
- 24 HEWITT, E., ROSS, K.A.: Abstract Harmonic Analysis II; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1970
- 25 EDMONDS, A.R.: Drehimpulse in der Quantenmechanik; Bibliographisches Institut, Mannheim 1964 (B.I. Hochschultaschenbücher 53/53a)
- 26 ERDELYI et.al.: Higher Transcendental Functions, Vol.2; Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London 1953
- 27 RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie; Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956
- 28 SCHAAF, M.: The Reduction of the Product of Two Irreducible Unitary Representations of the Proper Orthochronous Quantummechanical Poincaré Group; Lecture Notes in Physics 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1970

- 29 FUKS, B.A.: Introduction to the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables; American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1963
- 30 PFLAUMANN, E., UNGER, H.: Funktionalanalysis II; BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1974
- 31 TITCHMARSH, E.C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals; Oxford at the Clarendon Press, Oxford 1967
- 32 PUTNAM, C.R.: Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1967
- 33 SIMMS, D.J.: Lie Groups and Quantum Mechanics; Lecture Notes in Mathematics 52, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1968
- 34 KRAUS, K.: General State Changes in Quantum Theory; Ann.Phys. 64, 311-335 (1971)
- Operations and Effects in the Hilbert Space Formulation of Quantum Theory, in: Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces; Advanced Study Institute Marburg 1973 (Eds.: A.Hartkämper, H.Neumann), Lecture Notes in Physics 29, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1974
- 35 KRAUS, K.: Position Observables of the Photon; Preprint, Physikalisches Institut der Universität Würzburg
- 36 NEUMANN, H.: Transformation Properties of Observables; Helv.Phys. Acta 45, 811 - 819 (1972)

München, März 1976

Lebenslauf.

Am 5.4.1946 wurde ich, Domenico Pier Luigi Castrigiano, in Prag, Tschechoslowakei, geboren. Meine Eltern sind der italienische Handelsvertreter Giuseppe Castrigiano und seine Ehefrau Mathilde, geb. Pfrogner. Die Familie zog 1948 nach Meran, Oberitalien, und später, als ich sechs Jahre alt war, nach München, Bayern, wo ich seither lebe. Ich besuchte von der ersten bis zur vierten Klasse die Volksschule an der Implerstraße und wechselte im Herbst 1956 über in die Klenze-Oberreal-Schule, das jetzige Klenze-Gymnasium, wo ich im Sommer 1965 das Reifezeugnis erhielt. Als im Ausland lebender Italiener wurde ich vom italienischen Wehrdienst suspendiert, so daß ich mich noch im Herbst desselben Jahres an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München mit Hauptfach Physik immatrikulieren konnte. Im November 1967 legte ich die Diplomvorprüfung ab, im Dezember 1971 die Diplomhauptprüfung, beide mit der Beurteilung 'sehr gut'. Von da an bin ich bei Herrn Prof.Dr.H.J.Meister, Sektion Physik, Universität München, als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig, zeitweise von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt. Aus finanziellen Gründen stand ich außerdem in der Zeit von Oktober 1972 bis September 1974 als nichtvollbeschäftigte Lehrkraft im Angestelltenverhältnis im Dienst der Landeshauptstadt München.

D.Castrigiano

D. Castrigiano

Adresse: D.Castrigiano, 8000 München 83, Winternitzstr.6



